ROU	Th de stabilité de Lyapunov	L156 L171 L215 L220 L221

Lemme : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a $\lim_{t\to\infty} e^{tA} = 0_n \iff Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset]-\infty, 0[+ i\mathbb{R}$.

De plus, dans ce cas, on a $|||e^{tA}||| = o\left(\frac{1}{t}\right)$

Th : Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tq $f(0) = 0$ et $Sp(Df_0) \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R}$.

Alors le système autonome $(E) : \begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ admet 0 comme point attractif.

et $\exists \alpha > 0, \forall y_0 \in B(0, \alpha)$, $y(t)$ tend exponentiellement vite vers 0 qd $t \to \infty$.

Démonstration : ① On considère le système linéarisé au voisinage de 0.

$(E') : \begin{cases} z' = Az \\ z(0) = y_0 \end{cases}$ où $A = Df_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

La solution générale de (E') est donnée par $z(t) = e^{tA} \cdot y_0$.

D'après le lemme, $\lim_{t\to\infty} e^{tA} y_0 = 0$ donc $z(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

Ainsi, 0 est un point attractif de (E').

② On introduit la fonction de Lyapunov :

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $b(x, y) = \int_0^\infty \langle e^{tA}x, e^{tA}y \rangle \, dt$

Par Cauchy-Schwarz, on a $\forall t \geq 0$, $|\langle e^{tA}x, e^{tA}y\rangle| \leq |||e^{tA}|||^2 \cdot \|x\| \cdot \|y\| = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Comme l'intégrande est continue sur $[0, \infty[$, b est bien définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Par propriétés du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, b est un produit scalaire,

ainsi, $\|\cdot\|_q : x \mapsto \sqrt{b(x,x)}$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, équivalente à $\|\cdot\|$.

d'où $\exists c > 0$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_q \leq c\|x\|$.

On note $q : x \mapsto b(x,x)$ la forme quadratique associée à b.

De plus, on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$d_{q_x}(Ax) = 2b(x, Ax) = \int_0^\infty 2 \langle e^{tA} x, e^{tA} Ax \rangle \, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(\langle e^{tA} x, e^{tA} x \rangle\right) dt = -\|x\|^2.$$

③ Soit y la solution maximale de (E) qui passe par $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

On note $r(y) = f(y) - Ay = o(y)$,

ie $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n, \|y\|_q < \alpha \Rightarrow \|r(y)\|_q \leq \varepsilon . \|y\|_q$.

D'autre part si on note $\forall t \in D_y$, $y = y(t)$, on a si $\|y\|_q < \alpha$:

$$q(y)' = dq_y(y') = dq_y(f(y)) = 2b(y, Ay + r(y))$$

$$= -\|y\|^2 + 2b(y, r(y))$$

$$\underset{C-S}{\leq} -\|y\|^2 + 2\|y\|_q . \|r(y)\|_q$$

$$\leq -\frac{1}{C^2} . \|y\|_q^2 + 2\varepsilon \|y\|_q^2$$

$$\leq -\left(\frac{1}{C^2} - 2\varepsilon\right) . \|y\|_q^2$$

Ainsi, pour ε assez petit, $\exists \beta = \frac{1}{C^2} - 2\varepsilon > 0$ tq $\|y\|_q < \alpha \Rightarrow q(y)' \leq \beta q(y) \leq 0$

④ Supposons désormais $\|y_0\|_q^2 < \alpha$ et y solution maximale.

alors $\forall t \in D_y$, $q(y(t)) \leq q(y_0) < \alpha$.

(ce qui entraine que la solution est globale car maximale bornée)

En effet, si $\exists t_1 > 0$ tq $q(y(t_1)) \geq \alpha$, alors par le TVI, $\exists t_2 < t_1$, $q(y(t_2)) = \alpha$

et l'inégalité recherchée est vraie sur $[0; t_2]$.

Alors, $\forall \varepsilon > 0$, $q(y(t_2)) = q(y(t_2 - \varepsilon)) + \int_{t_2 - \varepsilon}^{t_2} q(y)' dt \leq \alpha - \beta \alpha \varepsilon < \alpha$ ↯

Enfin, d'après le résultat précédent, en regroupant,

si on note $g(t) = q(y(t))$, on a $\forall t > 0$, $g' \leq -\beta g$

et donc $g(t) \leq e^{-\beta t} g(0) \leq e^{-\beta t} \alpha$

Donc 0 est un point attractif de $\mathcal{O}$.