leçons : 226 suites $u_{n+1}=f(u_n)$ 232 approx $f(X)=0$ 158 matrices symétrique/hermitienne	# Méthode de relaxation 29	Références Ciarlet "Intro analyse num" p.102

Thm : Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $(n \geq 1)$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la bc de $\mathbb{R}^n$.
On note $A = D + T + {}^tT$ (D diagonale de A, T partie triangulaire sup stricte)
Soit $\omega \in \mathbb{R}_+^*$ et $M = \frac{D}{\omega} + {}^tT$, $N = \frac{1-\omega}{\omega} D - T$ de sorte que $A = M - N$. Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$.
Alors M est inversible et on peut définir par récurrence $u_{k+1} = M^{-1}(Nu_k + b)$ pour tout $k \geq 0$.
De plus, $\begin{cases} \text{si } \omega \in]0,2[\text{, alors } u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} u \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Au = b \\ \text{si } \omega > 2 \text{, alors il existe } u_0 \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } (u_k) \text{ diverge.} \end{cases}$

preuve :

① <u>MQ $D \in S_n^{++}(\mathbb{R})$:</u>
D diagonale donc $D \in S_n(\mathbb{R})$. $D = \begin{pmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{pmatrix}$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $d_i = {}^te_i A e_i > 0$ car $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. D'où $D \in S_n^{++}(\mathbb{R})$
On en déduit que <u>M est inversible</u> et que (u_k) est bien définie.

② Soit $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $Au = b$ (u existe et est unique car A inversible)
On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_k = u_k - u$.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \varepsilon_{k+1} = u_{k+1} - u = M^{-1}(Nu_k + b) - u = M^{-1}N(\varepsilon_k + u) + M^{-1}b - u$$
$$= M^{-1}N\varepsilon_k + M^{-1}[(M-A)u + b - Mu] = M^{-1}N\varepsilon_k$$

Par récurrence immédiate $\varepsilon_k = (M^{-1}N)^k \varepsilon_0 \quad \forall k \geq 0$

③ On suppose maintenant que $\omega \in]0,2[$.
Soit $\|\cdot\|$ la norme subordonnée à $\|v\| = \sqrt{{}^tvAv}$ ($\|\cdot\|$ norme d'algèbre)

<u>MQ $\|M^{-1}N\| < 1$:</u>

$$\|M^{-1}N\| = \|Id - M^{-1}A\| = \sup_{\|v\|=1} \|v - M^{-1}Av\|$$

Soit $v \in \mathbb{R}^n$ de norme 1 pour $\|\cdot\|$. Soit $w = M^{-1}Av \neq 0$ $\quad (Mw = Av)$ (*)

$$\|v-w\|^2 = {}^t(v-w)A(v-w) = \|v\|^2 - {}^twAv - {}^tvAw + {}^twAw$$
$$= 1 - {}^twMw - {}^tw\,{}^tMw + {}^tw(M-N)w$$

par (*)
$$= 1 - {}^tw({}^tM + N)w$$

Or $\quad {}^tM + N = \left(\frac{2}{\omega} - 1\right) D \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ donc ${}^t w ({}^tM + N) w > 0$

Ceci est vrai pour tout $w \in M^{-1}A(S^1(\mathbb{R}^n))$ qui est compact par continuité de $M^{-1}A$ donc $\exists \delta > 0 \ \forall \|v\| = 1 \quad w = M^{-1}Av \Rightarrow {}^t w ({}^tM+N) w \geq \delta$ par continuité de $w \mapsto {}^t w ({}^tM+N) w$

D'où $\|v - w\|^2 \leq 1 - \delta$ et en passant au sup $\|M^{-1}N\| < 1$

Donc $\varepsilon_k \to 0$ ie $u_k \to u$

④ Supposons maintenant $\omega > 2$.

On note λ_i les valeurs propres $\mathbb{C}$ de $M^{-1}N$ (non nécessairement distinctes)

On a $\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(M^{-1}N) = (\det M)^{-1} \det(N) = \left(\prod_{i=1}^n \frac{d_i}{\omega}\right)^{-1} \prod_{i=1}^n \frac{1-\omega}{\omega} d_i = (1-\omega)^n$

$\prod_{i=1}^n |\lambda_i| = |1-\omega|^n > 1 \Rightarrow \exists j \in [\![1,n]\!] \ |\lambda_j| > 1$

Soit $e \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à λ_j, $e = x + iy \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$

$((M^{-1}N)^k e)_k$ diverge donc $((M^{-1}N)^k x)_k$ ou $((M^{-1}N)^k y)_k$ diverge

On choisit alors $u_0 = x + u$ (si $((M^{-1}N)^k x)$ diverge) ou $u_0 = y + u$ (si $((M^{-1}N)^k y)$ diverge)

$$u_1 = M^{-1}(N u_0 + b) = M^{-1}Nx + M^{-1}Nu + M^{-1}b$$
$$= M^{-1}Nx + u - M^{-1}Au + M^{-1}b = M^{-1}Nx + u$$

Par récurrence $\quad u_k = (M^{-1}N)^k x + u$ donc (u_k) diverge