leçons :
236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

Calcul de trois intégrales

28

Références :
Pas de références, fait maison par Sylvain Lacroix

Exercice : On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx$, $J = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x+1} dx$, $K = \int_0^{\pi} \frac{x}{1-e^{ix}} dx$.

Alors $I = \frac{\pi^2}{6}$, $J = \frac{\pi^2}{12}$, $K = \frac{\pi^2}{4} + i\pi \ln 2$

preuve :

① Calcul de I :

On pose $f : \begin{cases}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x}{e^x - 1} \end{cases}$ f est mesurable et positive. $I = \int_0^{+\infty} f(x) dx$

$\forall x > 0 \quad f(x) = \frac{x e^{-x}}{1 - e^{-x}} = x e^{-x} \sum_{k \geq 0} e^{-kx}$. On pose $f_n : \begin{cases}]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x e^{-x} \sum_{k=0}^{n} e^{-kx} \end{cases}$

(f_n) est une suite croissante de fonctions positives qui converge simplement vers f.

Par Beppo-Levi : $I = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$

Or $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} x e^{-(k+1)x} dx \underset{\text{IPP}}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\underbrace{\left[-x \frac{e^{-(k+1)x}}{k+1} \right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(k+1)x}}{k+1} dx \right)$

$= \sum_{k=0}^{n} \left[- \frac{e^{-(k+1)x}}{(k+1)^2} \right]_0^{+\infty} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

② Calcul de J :

$J - I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{e^x+1} - \frac{x}{e^x - 1} \right) dx = \int_0^{+\infty} x \frac{e^x - 1 - e^x - 1}{e^{2x} - 1} dx = - \int_0^{+\infty} \frac{2x}{e^{2x} - 1} dx$

$\underset{2x = u}{\to} = - \int_0^{+\infty} \frac{u}{e^u - 1} \frac{du}{2} = -\frac{1}{2} I$

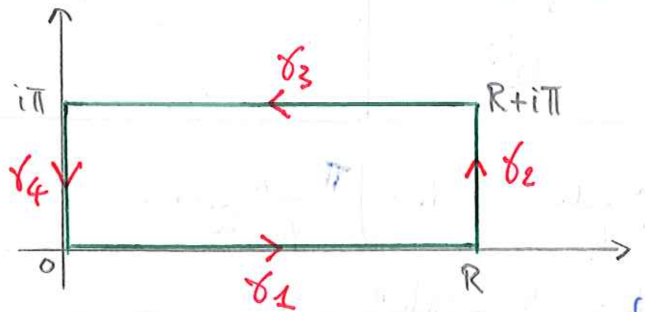
D'où $J = \frac{1}{2} I = \frac{\pi^2}{12}$

③ Calcul de K :

On pose $\Omega = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > -1, -2\pi < \mathrm{Im}(z) < 2\pi \}$. Ω est ouvert.

On pose $f : \begin{cases} \Omega \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases} \end{cases}$ f est continue sur Ω, holomorphe sur $\Omega \setminus \{0\}$ donc f est holomorphe sur Ω.

On considère, pour $R>0$, le rectangle Γ_R suivant (inclus dans Ω) :



$$\int_{\Gamma_R} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4}$$

Par le théorème de Cauchy : $\displaystyle\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$

- $\displaystyle\int_{\gamma_4} f(z)\,dz = -\int_0^{\pi} f(ix)\,i\,dx = -i\int_0^{\pi} \frac{ix}{e^{ix}-1}\,dx = -K$

- $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_0^{R} f(x)\,dx = \int_0^R \frac{x}{e^x-1}\,dx \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} I$

- $\displaystyle\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_0^R f(x+i\pi)\,dx = -\int_0^R \frac{x+i\pi}{e^{x+i\pi}-1}\,dx$

$$= \int_0^R \frac{x}{e^x+1}\,dx + i\pi\int_0^R \frac{dx}{e^x+1}$$

$$\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} J + i\pi\int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+1} \qquad \text{or } \int_0^{+\infty}\frac{dx}{e^x+1} = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}\,dx}{1+e^{-x}} \underset{u=e^{-x}}{=} \int_1^0 \frac{u}{1+u}\,\frac{du}{-u} = \ln 2$$

- $\displaystyle\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^{\pi} f(R+ix)\,i\,dx = i\int_0^{\pi}\frac{R+ix}{e^{R+ix}-1}\,dx$

$\forall R>0,\ \forall x\in[0,\pi]$ $\quad \left|\dfrac{R+ix}{e^{R+ix}-1}\right| \leqslant \dfrac{R+x}{e^R-1} \leqslant ax+b$ avec $a,b>0$, R grand

Or $x\mapsto ax+b$ est intégrable sur $[0,\pi]$ donc par convergence dominée :

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\pi} 0\,dx = 0$$

D'où, en passant à la limite lorsque $R\to+\infty$: $-K + I + J + i\pi\ln 2 = 0$

$$K = \frac{3}{2}I + i\pi\ln 2 = \frac{\pi^2}{4} + i\pi\ln 2$$