

Solution de l'équation des ondes par moyennes sphériques

Théorème. On considère l'équation des ondes avec conditions initiales $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = 0 \\ u(0, x) = f(x) \\ \partial_t u(0, x) = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

Soit $u \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, vérifiant cette équation, alors :

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} f(y) dS(y) \right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} g(y) dS(y)$$

Démonstration. L'équation des ondes est stable par isométrie, cela nous incite à regarder des moyennes sphérique des solution. Commençons par un lemme calculatoire :

Lemme. Soit $u \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $v(r) = \oint_{S_r} u(y) dS(y)$, alors v vérifie

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = \oint_{S_r} \Delta u(y) dS(y)$$

Démonstration. Notons que par un changement de variable, v s'écrit

$$v(r) = \oint_{S_1} u(rz) dS(z)$$

Donc $v'(r) = \oint_{S_1} \nabla u(rz) \cdot z dS(z) = \oint_{S_r} \nabla u(y) \cdot \nu(y) dS(y) = \frac{r}{n} \oint_{B_r} \Delta u(y) dy$ (où on a utilisé la formule de Stokes et le $\frac{r}{n}$ vient de la normalisation de l'intégrale).

$$\begin{aligned} v''(r) &= \frac{1}{r} v'(r) + \frac{r}{n} \oint_{B_1} \nabla \Delta u(rz) \cdot z dz \\ &= \frac{1}{r} v'(r) + \frac{r}{n} \oint_{B_r} \nabla \Delta u(y) \cdot \frac{y}{r} dy \\ &= \frac{1}{r} v'(r) + \oint_{S_r} \Delta u(y) \frac{y}{r} \cdot \frac{y}{r} dS(y) - \frac{r}{n} \oint_{B_r} \Delta u(y) \nabla \cdot \frac{y}{r} dy \\ &= \frac{1}{r} v'(r) + \oint_{S_r} \Delta u(y) \frac{y}{r} \cdot \frac{y}{r} dS(y) - \oint_{B_r} \Delta u(y) \nabla \cdot dy \quad \text{car } \nabla \cdot y = n \\ &= \frac{1-n}{r} v'(r) + \oint_{S_r} \Delta u(y) dS(y) \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

On pose $U(t, x, r) = \int_{S_r(x)} u(t, y) dS(y)$, et de même on définit F comme la moyenne de f , G la moyenne de g . Notons que $U(t, x, r) \rightarrow u(t, x)$ quand $r \rightarrow 0$ et de même pour F, G . Selon le lemme précédent, U vérifie :

$$\begin{cases} \partial_r^2 U + \frac{2}{r} \partial_r U = \partial_t^2 U \\ U(0, x, r) = F(x, r) \\ \partial_t U(0, x, r) = G(x, r) \end{cases}$$

Posons $\tilde{U} = rU$, $\tilde{F} = rF$, $\tilde{G} = rG$. Alors on obtient le système :

$$\begin{cases} \partial_r^2 \tilde{U} = \partial_t^2 \tilde{U} \text{ dans } \mathbb{R}_+^2 \\ \tilde{U}(0, x, r) = \tilde{F}(x, r) \\ \partial_t \tilde{U}(0, x, r) = \tilde{G}(x, r) \end{cases}$$

On a de plus $\tilde{U}(t, x, 0) = \tilde{F}(x, 0) = \tilde{G}(x, 0) = 0$. Les solutions de cette équation sont données par la formule de d'Alembert (avec réflexion) ; pour $0 < r < t$,

$$\tilde{U}(t, x, r) = \frac{\tilde{F}(x, t+r) - \tilde{F}(x, t-r)}{2} + \frac{1}{2} \int_{t-r}^{t+r} \tilde{G}(x, s) ds$$

Et $u(t, x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \tilde{U}(t, x)$, donc on obtient :

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} f(y) dS(y) \right) + \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} g(y) dS(y)$$

□