

## Fonction caractéristique $\mathcal{C}^1$ sans moment

**Théorème.** Soit  $(b_n)_{n \geq 0}$  une suite décroissante qui tend vers 0, on pose  $\phi_n(t) = \sum_{k=0}^n b_k \sin(kt)$ .

Alors  $\phi_n$  converge localement uniformément sur  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , et on a l'équivalence suivante :

$$(nb_n \rightarrow 0) \iff (\phi_n \text{ converge uniformément sur } \mathbb{R})$$

**Corollaire.** Soit  $C^{-1} = \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k^2 \log(k)}$ , et  $\mu$  la distribution de probabilité sur  $\mathbb{Z}$  définie par  $\mu(n) = \frac{C}{2n^2 \log(|n|)}$ . Soit  $\phi$  sa fonction caractéristique, alors  $\phi \in \mathcal{C}^1$  et  $\mathbb{E}[|\mu|] = \infty$ .

*Démonstration.* Soit  $S_n(t) = \sum_{k=0}^n \sin(kt)$ , on a  $S_n(t) = \operatorname{Im} \frac{e^{i(n+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$  (somme géométrique), donc  $|S_n(t)| \leq \frac{1}{|\sin(t/2)|}$ .

Une transformée d'Abel sur  $\phi_n$  donne

$$\phi_n(t) = \sum_{k=0}^n (S_k(t) - S_{k-1}(t))b_k = S_n(t)b_n + \sum_{k=0}^{n-1} S_k(t)(b_k - b_{k+1})$$

Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ ,  $\delta > 0$  la distance entre  $K$  et  $\mathbb{Z}$ . Le premier terme converge uniformément vers 0 car  $|S_n(t)b_n| \leq \frac{b_n}{|\sin(\delta/2)|}$ , et le second terme est une somme qui converge absolument (car  $\sum_{k=0}^{n-1} |S_k(t)(b_k - b_{k+1})| \leq \frac{b_0}{|\sin(\delta/2)|}$ ), donc uniformément, donc  $\phi_n$  converge uniformément. Notons  $\phi$  sa limite et  $R_n = \phi - \phi_n$  le reste, la même transformée d'Abel donne  $|R_n(t)| \leq \frac{b_n}{|\sin(t/2)|}$ .

( $\Leftarrow$ )

Si  $\phi_n$  converge uniformément, alors  $v_n(t) := \sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin(kt)$  converge uniformément vers 0.

En particulier,  $v_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) \rightarrow 0$ , et :

$$v_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} b_{2n} \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi k}{2n}\right) = nb_{2n}$$

D'où le résultat.

( $\Rightarrow$ )

$\phi$  se prolonge naturellement à  $\mathbb{R}$  de manière continue par  $\phi(0) = 0$  et  $\phi_n$  converge donc simplement vers  $\phi$ . La majoration  $|R_n(t)| \leq \frac{b_n}{|\sin(t/2)|}$  n'est pas suffisante pour avoir la convergence uniforme : on découpe le reste en 2. Soit  $p > 0$  que l'on fixe plus tard, on a

$$\begin{aligned} |R_n(t)| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k |\sin(kt)| + |R_{n+p}(t)| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} kb_k |t| + \frac{b_{n+p}}{|\sin(t/2)|} \end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , et  $N > 0$  tel que pour tout  $n > N$ ,  $nb_n < \varepsilon$ . Soit alors  $n > N$ ,  $t \in [-\pi, \pi]$  :

$$|R_n(t)| \leq \left( p|t| + \frac{\pi}{p|t|} \right) \varepsilon$$

Avec  $p = E(1/t) + 1$ , on a une majoration suffisante, d'où le résultat.  $\square$

*Démonstration.* La fonction caractéristique de  $\mu$  est  $\phi(t) = C \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(kt)}{k^2 \log(k)}$ . On note  $\phi_n$  les sommes partielles, notons qu'il y a convergence absolue donc uniforme de la suite des sommes partielles.

$\phi'_n(t) = -C \sum_{k=2}^n \frac{\sin(kt)}{k \log(k)}$ , donc  $\phi'_n$  vérifie les hypothèses du théorème et converge uniformément vers une fonction continue, et  $\phi$  est donc  $\mathcal{C}^1$ .

Une comparaison série/intégrale donne  $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{C}{k \log(k)} \geq C \log \log_2(n) \rightarrow \infty$ , ce qui prouve le résultat.  $\square$