Stabilité d'une EDL périodiques

En pratique, on admet le lemme suivant :

Lemme. *Soit θ vérifiant $\theta'' + q\theta = 0$ où q est une fonction continue positive non identiquement nulle. Alors θ s'annule.*

Théorème. *Soit q une fonction continue, positive, non identiquement nulle, et T-périodique où $T > 0$. Si $\int_0^T q \leq \frac{4}{T}$, alors toutes les solutions de $\theta'' + q\theta = 0$ sont bornées.*

Démonstration. On note $A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{bmatrix}$, tel que la version vectorielle du système soit $X' = AX$ où $X(0) = \begin{bmatrix} \theta(0) \\ \theta'(0) \end{bmatrix}$. On note $\Phi : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ la solution à :

$$\begin{cases} \Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \\ \Phi(0) = I_2 \end{cases}$$

On note S l'ensemble des solutions de l'équation. C'est un espace vectoriel de dimension 2. De plus, pour tout $\theta \in S$, $t \mapsto \theta(t+T)$ est aussi dans S par périodicité de q ; on peut définir l'endomorphisme suivant :

$$P \begin{cases} S \to S \\ \theta \mapsto (t \mapsto \theta(t+T)) \end{cases}$$

P est bien défini par T-périodicité de q, et sa matrice dans la base des solutions de conditions initiales $(1,0)$ et $(0,1)$ est exactement $\Phi(T)$.

Supposons que P ait une fonction propre θ associé à une valeur propre réel, noté ρ. Selon le lemme, θ s'annule en un certain $a \in \mathbb{R}$. Alors $\theta(a+T) = (P\theta)(a) = \rho\theta(a) = 0$.

Les zéros de θ sont isolés, et il existe alors $b \in]a, a+T]$ un zéros de θ tel que θ est non nulle sur $]a, b[$ (voir > 0 quitte à considérer $-\theta$).

$\int_a^b q(t)dt \leq \frac{4}{T}$ par hypothèse, mais pour tout $a < s < r < b$, on a aussi :

$$\begin{aligned} \int_a^b q(t)dt &= \int_a^b \frac{-\theta''(t)}{\theta(t)} dt \\ &> \frac{1}{M} \int_a^b -\theta''(t)dt && \text{où } M = \max_{t \in [a,b]} \theta(t) \\ &\geq \frac{1}{M} \int_s^r -\theta''(t)dt \\ &= \frac{\theta'(s) - \theta'(r)}{M} \end{aligned}$$

En particulier, par l'égalité des accroissements fini, il existe $s < t < r$ tels que $\theta'(s) = \frac{M}{t-a}$ et $-\theta'(t) = \frac{M}{b-t}$, donc

$$\int_a^b q(t)dt > \frac{1}{t-a} + \frac{1}{b-t} = \frac{b-a}{(t-a)(b-t)} \geq \frac{b-a}{(\frac{a+b}{2}-a)(b-\frac{a+b}{2})} = \frac{4}{b-a} \geq \frac{4}{T}$$

Ce qui est absurde par hypothèse. Ainsi, P n'as pas de valeurs propres réelles, et P est donc $\mathbb{C}$-diagonalisable avec des valeurs propres complexes conjuguées.

Notons que $\det(P) = 1$. En effet,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det(\Phi(t)) &= \det(\Phi(t))Tr(\Phi(t)^{-1}\Phi'(t)) \\
&= \det(\Phi(t))Tr(\Phi(t)^{-1}A(t)\Phi(t)) \\
&= 0 && \text{car } Tr(A) = 0
\end{aligned}$$

Et $\det(\Phi(0)) = 1$, d'où $\det(P) = 1$.

Ainsi, les deux valeurs propres λ_1, λ_2 de P vérifient $\lambda_1\lambda_2 = 1$ et sont conjuguées, donc de la forme $e^{\pm i\theta}$ où $\theta \in]0, \pi[$. Mais alors $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\|P^n\| = C < \infty$ (où $\|.\|$ est une norme quelconque).

Soit alors θ une solution quelconque, on définit une norme sur S par $\|\theta\| = \max\limits_{t\in[0,T]}|\theta(t)|$. Pour tout $t \in [0,T], n \in \mathbb{Z}$, on a $|\theta(t+nT)| = |(P^n\theta)(t)| \leq C\|\theta\|$, donc les solutions sont bornées, ce qui achève la preuve. $\square$

En application, on peut étudier la stabilité de $y'' + \omega_0^2(1 + \varepsilon\cos(t))y = 0$; si $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \omega_0 < \frac{1}{\pi}$, alors toutes les solutions sont bornées.