Distance de Hausdorff

Définition. Soit (X, d) un espace métrique complet, $\mathcal{K}(X)$ l'ensemble des compacts de X. Soit A un compact, on note $d_A(x) = \inf_{a\in A} d(a, x)$ la distance à A.
Soient A, B deux compacts de X, on défini leur distance de Hausdorff par :

$$\delta(A, B) = \max(\sup_{a\in A} d_B(a), \sup_{b\in B} d_A(b))$$

Lemme. *Soient $A, B \in \mathcal{K}(X)$, alors $\delta(A, B) = \|d_A - d_B\|_\infty$.*

Remarque. *En pratique, on admettra ce lemme. Mais c'est pas très compliqué.*

Théorème. *$(\mathcal{K}(X), \delta)$ est un espace métrique complet.*

Démonstration. Le fait que ce soit un espace métrique découle du lemme précédent (en particulier, l'inégalité triangulaire). Il suffit de montrer la complétude. Soit (A_n) une suite de Cauchy. On note $r_n = \sup_{p,q\geq n} \delta(A_p, A_q)$. $r_n \to 0$ par hypothèse, et on supposera même, quitte à faire une extraction sur les A_n, que (r_n) est sommable, non nulle (car sinon (A_n) est stationnaire).
On pose :

$$A = \{x : \exists (x_{\phi(n)}) \in \prod A_{\phi(n)},\ x_{\phi(n)} \to x\} = \cap_{n\geq 1}\overline{\cup_{k\geq n} A_k}$$

On commence par montrer ces deux résultat :
1/ Pour tout $x_n \in A_n$, il existe $x \in A$ tel que $d(x, x_n) \leq \sum_{k\geq n} r_k$.
2/ Pour tout $x \in A$, $N \geq 0$, il existe $x_N \in A_N$ tel que $d(x, x_N) \leq 2r_N$.

1/ On construit une suite de Cauchy $(x_i)_{i\geq m}$, avec $x_i \in A_i$; si $(x_m, .., x_i)$ sont définis, alors il existe $x_{i+1} \in A_{i+1}$ tel que $d(x_i, x_{i+1}) \leq \delta(A_i, A_{i+1}) \leq r_i$. Comme (r_i) est sommable, (x_i) est de Cauchy et converge vers $x \in A$, qui vérifie l'inégalité attendue.

2/ Il existe $m > N$, $x_m \in A_m$, tel que $d(x_m, x) \leq r_N$. $\delta(A_N, A_m) \leq r_N$, donc il existe $x_N \in A_N$ tel que $d(x_N, x_m) \leq r_N$, d'où $d(x_N, x) \leq 2r_N$.

Selon 1/, A est non vide. A est bien fermé car c'est une intersection de fermés, et pour montrer que A est compact, il suffit de montrer sa précompacité, ou encore de montrer que tout ensemble $r > 0$-séparé est fini.

Soit $r > 0$ et $(x^i)_{i\in I}$ une suite r-séparée de A. Soit N que l'on fixera plus tard.
Alors pour chaque x^i, on trouve, grâce à 2/, x^i_N dans A_N tel que $d(x^i, x^i_N) \leq 2r_N$. $(x^i_N)_i$ est une suite $r - 4r_N$-séparée de A_N. Pour N assez grand, $r - 4r_N > 0$, et par compacité de A_N, une suite $r - 4r_N$-séparée est finie, donc I est fini, ce qui montre la précompacité (donc la compacité car A est fermé dans un espace complet).

Il reste à montrer que $A_n \to A$. 1/ implique que $\sup_{x\in A_n} d_A(x) \to 0$ et 2/ que $\sup_{x\in A} d_{A_n}(x) \to 0$, d'où le résultat.

□

Corollaire. *(Théorème de Hutchinson) Soit $c \in]0,1[$, on considère $w_1, ..w_N$ des applications c-Lipschitziennes de X dans X. On pose*

$$W : \begin{cases} \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X) \\ A \mapsto \cup_{i=1}^{N} w_i(A) \end{cases}$$

Alors W admet un unique point fixe.

Démonstration. Montrons que W est c-Lipschitzienne. Soient $A, B \in \mathcal{K}(X)$, $x \in W(A)$. Alors il existe $i \in \{1..N\}$ tel que $x = w_i(y)$ où $y \in A$. Il existe $z \in B$ tel que $d(y,z) \leq \delta(A,B)$. Alors $d(w_i(y), w_i(z)) \leq c\delta(A,B)$, et $w_i(z) \in W(B)$. D'où $\delta(W(A), W(B)) \leq c\delta(A,B)$.
On applique le théorème de point fixe de Picard : il existe bien un point fixe unique. Cela permettre de construire le triangle de Sierpinsky, entre autre. □