14 $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ principal

ref : Ortiz, FG alg 1.

THÉORÈME 14.1 *L'anneau quotient* $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ *est principal.*

PREUVE.
Démarche :
On va se ramener par deux isomorphismes successifs à un anneau plus simple : $\mathbb{C}[U,\frac{1}{U}]$ pour lequel on a le lemme suivant :

LEMME 14.2 *Soient A et B sont des anneaux intègres tels que $A \subset B \subset Frac(A)$. Si A est principal, alors B l'est aussi.*

PREUVE. Soit J un idéal de B. L'intersection de J avec A est un idéal de A qui est engendré par un élément a puisque A est principal. Montrons que a engendre en fait J tout entier.

Soit $b \in J$. On écrit $b = \frac{p}{q}$ avec p et q dans A, premiers entre eux. On a $p = bq \in J \cap A$, donc $p = ac$ avec $c \in A$. Il reste à montrer que $\frac{1}{q}$ appartient à B. Comme p et q sont premiers entre eux dans A qui est principal, on a une relation de Bézout qui les lie : $up + vq = 1$ avec $u, v \in A$.

D'où $pbq + vq = 1$, puis $q(pb + v) = 1$, donc $\frac{1}{q} \in B$. □

L'anneau $\mathbb{C}[U]$ est principal et son corps des fractions $\mathbb{C}(U)$ contient bien $\mathbb{C}[U,\frac{1}{U}]$, donc le lemme s'applique et ce dernier anneau est bien principal.

Montrons un premier isomorphisme :

$$\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \simeq \mathbb{C}[U,V]/(UV-1)$$

Il faut penser à U et V comme z et $\overline{z}$ pour $z = X + iY$ pour poser :

Par propriété universelle de l'anneau $\mathbb{C}[U,V]$, il existe un (unique) morphisme

$$\Psi : \mathbb{C}[U,V] \to \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$$

vérifiant $\Psi(U) = X + iY$ et $\Psi(V) = X - iY$. Il passe au quotient en un morphisme

$$\tilde{\Psi} : \mathbb{C}[U,V]/(UV-1) \to \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$$

car $\Psi(U)\Psi(V) - 1 = (X+iY)(X-iY) - 1 = X^2+Y^2-1 = 0$.

De même, par propriété universelle de $\mathbb{C}[X,Y]$, il existe un (unique) morphisme

$$\Phi : \mathbb{C}[X,Y] \to \mathbb{C}[U,V]/(UV-1)$$

vérifiant $\Phi(X) = \frac{U+V}{2}$ et $\Phi(Y) = \frac{U-V}{2i}$. Il passe au quotient en un morphisme

$$\tilde{\Phi} : \mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \to \mathbb{C}[U,V]/(UV-1)$$

car $\Phi(X)^2 + \Phi(Y)^2 - 1 = (\frac{U+V}{2})^2 + (\frac{U-V}{2i})^2 - 1 = UV - 1 = 0$.

On vérifie que $\tilde{\Psi} \circ \tilde{\Phi} = \mathrm{id}$ et $\tilde{\Phi} \circ \tilde{\Psi} = \mathrm{id}$. Il suffit de le faire sur les générateurs et alors c'est immédiat, on l'a construit pour.

Montrons un deuxième isomorphisme :

$$\mathbb{C}[U,V]/(UV-1) \simeq \mathbb{C}[U,\frac{1}{U}]$$

Par propriété universelle de l'anneau $\mathbb{C}[U,V]$, on a un morphisme

$$\Theta : \mathbb{C}[U,V] \to \mathbb{C}[U, \frac{1}{U}]$$

tel que $\Theta(U) = U$ et $\Theta(V) = \frac{1}{U}$. Ce morphisme est surjectif car l'image contient les deux générateurs U et $\frac{1}{U}$.

Cherchons le noyau de Θ. L'idéal $(UV-1)$ est dans le noyau car $U\frac{1}{U}-1=0$. Réciproquement si $P \in \ker\Theta$, Considérons P dans $\mathbb{C}(U)[V]$ et faisons une division euclidienne ce qui est justifié car $\mathbb{C}(U)$ est un corps donc $\mathbb{C}(U)[V]$ est euclidien.

$$P = (UV-1)Q + R$$

avec $R \in \mathbb{C}(U)$ et $Q \in C(U)[V]$. En multipliant par le ppcm A des dénominateurs des fractions rationnelles en U, on trouve :

$$AP = (UV-1)AQ + AR$$

avec $AQ \in \mathbb{C}[U][V]$ et $AR \in \mathbb{C}[U]$. En appliquant Θ, on trouve $A(T)R(T) = 0$, puis $R = 0$ car $A \neq 0$ dans $\mathbb{C}[T]$. Comme $UV-1$ est irréductible dans $\mathbb{C}[U,V]$ car primitif et de degré 1 dans l'anneau isomorphe $\mathbb{C}[U][V]$, par le lemme de Gauss $UV-1$ divisant AP doit diviser P (car A est de degré 0 en V). Ainsi $P \in (UV-1)$.

$\square$

Leçons concernées : algèbre de polynômes en plusieurs indéterminées, anneaux principaux.