MM

Réduction de Frobenius

L 122 L 153
L 141 L 154
L 150 L 159
L 151

Lemme : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\exists\, x \in E$ tq $\mu_f = \mu_{f,x}$;

De plus, $\langle x \rangle_f$ admet un supplémentaire stable par f.

Démonstration : ① Exhibons $x \in E$ tq $\mu_f = \mu_{f,x}$.

Ecrivons $\mu_f = \prod_{k=1}^{p} P_k^{\alpha_k}$; P_k irréductibles unitaires 2 à 2 distincts, $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$.

D'après le lemme des noyaux, $\mathrm{Ker}(\mu_f(f)) = E = \bigoplus_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(P_k^{\alpha_k}(f))$.

Or $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\mathrm{Ker}(P_k^{\alpha_k - 1}(f)) \subsetneq \mathrm{Ker}(P_k^{\alpha_k}(f))$ d'après la suite des noyaux itérés.

Soit donc $x_k \in \mathrm{Ker}(P_k^{\alpha_k}(f)) \setminus \mathrm{Ker}(P_k^{\alpha_k - 1}(f))$. On a : $\mu_{f,x_k} = P_k^{\alpha_k}$.

On considère $x = x_1 + \dots + x_p \in E$. Par linéarité, $0_E = \mu_{f,x}(f)(x) = \sum_{k=1}^{p} \mu_{f,x}(f)(x_k)$.

Or $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\mu_{f,x}(f)(x_k) \in \mathrm{Ker}(P_k^{\alpha_k}(f))$ et ces espaces sont en somme directe,

donc $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $\mu_{f,x}(f)(x_k) = 0_E$, ainsi $\mu_{f,x_k} \mid \mu_{f,x}$ ie $P_k^{\alpha_k} \mid \mu_{f,x}$.

Or les $P_k^{\alpha_k}$ st 2 à 2 premiers entre eux donc $\mu_f \mid \mu_{f,x}$ puis $\mu_f = \mu_{f,x}$.

② Exhibons un supplémentaire de $\langle x \rangle_f$ stable par f.

Notons $p = \dim(\langle x \rangle_f)$ et considérons $(e_1, \dots, e_p) := (x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ base de $\langle x \rangle_f$.

Remarquons que $\mu_{f,x} = \mu_f$ donc $\mathbb{K}[f] = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, \dots, f^{p-1})$.

On peut compléter $(e_1, \dots, e_p)$ en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Soit $(e_1^*, \dots, e_p^*)$ sa base duale.

On considère $F = \{ y \in E : \forall j \in \mathbb{N},\ e_p^*(f^j(y)) = 0 \}$ sev stable par f,

et notons que $F = \{ y \in E : \forall j \in [\![0, p-1]\!],\ e_p^*(f^j(y)) = 0 \}$

- Mq $\langle x \rangle_f \cap F = \{0_E\}$. Soit $y \in \langle x \rangle_f \cap F$: on a : $y = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k e_{k+1}$

Pour $j = 0$, on a : $0 = e_p^*(f^0(y)) = e_p^*\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k e_{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k e_p^*(e_{k+1}) = a_{p-1} = 0$

Puis, de proche en proche, $\forall j \in [\![0, p-1]\!]$, $e_p^*(f^j(y)) = 0 \Rightarrow a_{p-1-j} = 0$: $y = 0_E$.

- Mq $\dim F + \dim \langle x \rangle_f = \dim E$, ie $\dim F = n - p$.

La famille des p formes linéaires $(e_p^* \circ f^j)_{0 \leq j \leq p-1}$ est libre.

En effet, soient $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ tq $\sum_{j=0}^{p-1} a_k e_p^* \circ f^j = \tilde{0}$,

alors $\sum_{j=0}^{p-1} a_j f^j(x) \in \langle x \rangle_f \cap F = \{0_E\}$, or $(x, \dots, f^{p-1}(x))$ libre donc $a_0 = \dots = a_{p-1} = 0$

Ainsi F est l'intersection de p hyperplans indépendants, donc $\dim F = n - p$

- On a donc : $E = \langle x \rangle_f \oplus F$.

Th de réduction de Frobenius :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $\exists r \in \mathbb{N}^*$, $\exists P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ unitaires, $\exists E_1, \dots E_r$ stables par f

tq :
- $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$
- $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $P_{i+1} \mid P_i$
- $\forall i \in [\![1, r]\!]$, f_{E_i} est cyclique, de polynôme minimal P_i.

Démonstration : Montrons l'existence par récurrence sur $n = \dim(E)$.

- Soit E un espace vectoriel de dimension 1, alors $f \in \mathcal{L}(E)$ est cyclique.
  Par suite, $r = 1$, $P_1 = \mu_f$, $E_1 = E$ conviennent.
- Supposons le résultat établi pour les endomorphismes des espaces de dimension inférieure ou égale à n.
  Soit E un espace vectoriel de dimension $n+1$, et $f \in \mathcal{L}(E)$.
  D'après le lemme, introduisons $x \in E$ tel que $\mu_{f,x} = \mu_f$.
  On pose $E_1 = \langle x \rangle_f$ sous espace stable par f. et $P_1 = \mu_f$.
  Par nature, f_{E_1} est cyclique, de polynôme minimal $P_1 = \mu_{f,x} = \mu_f$.

Considérons F un supplémentaire stable de E_1 fournit par le lemme.
alors $\dim F \leq n$ et on peut appliquer l'HR à l'endomorphisme f_F.
Ainsi, il existe une suite de polynômes unitaires $P_2, \dots, P_r$,
des sev stables $E_2, \dots, E_r$ tq : $F = \bigoplus_{i=2}^{r} E_i$;

$\forall i \in [\![2, r-1]\!]$, $P_{i+1} \mid P_i$

$\forall i \in [\![2, r]\!]$, f_{E_i} cyclique de polynôme minimal P_i

On a ainsi :
- $E = \langle x \rangle_f \oplus F = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$;
- $\forall i \in [\![1, r]\!]$, f_{E_i} cyclique de polynôme minimal P_i ;
- Comme $P_2 = \mu_{f_F}$ et $P_1 = \mu_f$, la relation $\mu_{f_F} \mid \mu_f$ implique $P_2 \mid P_1$.

  Par suite, $\forall i \in [\![1, r-1]\!]$, $P_{i+1} \mid P_i$.

Récurrence établie.