

Gou.
An

Théorème de Müntz

L 152
L 201
L 202
L 209

Lemme 1 : Déterminant de Cauchy

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}, (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in]0, \infty[$, alors $\det \left(\frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$

Lemme 2 : Déterminant de Gram

Soient E un espace préhilbertien, F un sev de E , de base $(e_1, \dots, e_n)$.

Soit $x \in E \setminus F$. alors $d(x, F)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$

Th de Müntz : On se place dans l'espace préhilbertien $(\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de réels positifs

alors $V = \text{Vect}(x \mapsto x^{\alpha_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1]) \iff \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\alpha_n}$ diverge.

Démonstration : Par soucis de clarté, on notera simplement x^α au lieu de $x \mapsto x^\alpha$.

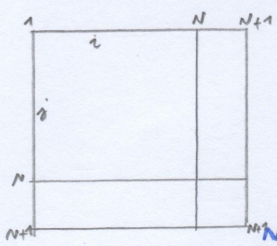
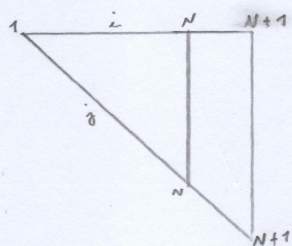
$\forall m \in \mathbb{R}^+, \forall N \in \mathbb{N}$, on note $\Delta_N(m)$ la distance de x^m à $\text{Vect}(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})$.

On a donc, avec les déterminants de Gram, $\Delta_N(m)^2 = \frac{G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}, x^m)}{G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N})}$

Or $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, on a : $\langle x^a, x^b \rangle = \int_0^1 x^a x^b dx = \frac{1}{a+b+1}$.

Donc $G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}) = \mathcal{G}((\alpha_i + \frac{1}{2}), (\alpha_i + \frac{1}{2})) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (\alpha_j - \alpha_i)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq N} (\alpha_i + \alpha_j + 1)^2}$

De même, $G(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_N}, x^m) = \mathcal{G}((\alpha_1 + \frac{1}{2}, \dots, \alpha_N + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}); (\alpha_1 + \frac{1}{2}, \dots, \alpha_N + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}))$



$$= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (\alpha_j - \alpha_i)^2 \cdot \prod_{i=1}^N (\alpha_i - m)^2}{(2m+1) \cdot \prod_{1 \leq i, j \leq N} (\alpha_i + \alpha_j + 1)^2 \cdot \prod_{i=1}^N (\alpha_i + m + 1)^2}$$

D'où $\Delta_N(m)^2 = \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{\prod_{i=1}^N (\alpha_i - m)^2}{\prod_{i=1}^N (\alpha_i + m + 1)^2}$

Et finalement, $\Delta_N(m) = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \cdot \prod_{i=1}^N \frac{|\alpha_i - m|}{\alpha_i + m + 1}$

1^{er} cas : $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. On pose $M = \sup_{n \in \mathbb{N}} d_n$.

$\Rightarrow$ On a $\forall n \in \mathbb{N}, d_n \leq M$ donc $\frac{1}{d_n} \geq \frac{1}{M}$

La suite $(\frac{1}{d_n})$ ne tend pas vers 0 donc $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{d_n}$ DVG

$\Leftarrow$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Nq $x^k \in \bar{V}$ ie $\Delta_N(k) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

$$\text{On a : } \prod_{i=1}^N \frac{|d_i - k|}{d_i + k + 1} \leq \prod_{i=1}^N \frac{d_i + k + 1 - 1}{d_i + k + 1} = \prod_{i=1}^N \left(1 - \frac{1}{d_i + k + 1}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{N + k + 1}\right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Par linéarité, on obtient : $P([0,1]) \subset \bar{V}$.

Puis d'après le théorème de Weierstrass $P([0,1])^{LH_2} = \mathcal{C}([0,1]) \subset \bar{V}$

D'où $\bar{V} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$: V est dense dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

2^{ème} cas : $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = +\infty$.

$\Rightarrow$ Supposons que V soit dense dans $\mathcal{C}([0,1])$.

En particulier, $\forall m \in \mathbb{R}^+ \setminus (d_n)_{n \in \mathbb{N}}, \Delta_N(m) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

On fixe une valeur de m . Comme $d_n \rightarrow \infty, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0, d_n > m$.

On pose $\forall n \geq N_0, u_n = \ln \left(\frac{d_n - m}{d_n + m + 1} \right)$,

de sorte que $\Delta_N(m) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \prod_{n=N_0}^N \frac{d_n - m}{d_n + m + 1} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sum_{n \geq N_0} u_n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\infty$.

$$\text{Or } u_n = \ln \left(\frac{d_n + m + 1 - 2m - 1}{d_n + m + 1} \right) = \ln \left(1 - \frac{2m+1}{d_n + m + 1} \right) \sim -\frac{2m+1}{d_n + m + 1} \sim -\frac{2m+1}{d_n}$$

ainsi, par équivalence de séries à termes négatifs $\sum u_n$ DVG $\Leftrightarrow \sum \frac{1}{d_n}$ DVG.

$\Leftarrow$ Supposons que $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{d_n}$ DVG.

D'après le raisonnement par équivalence précédent,

$\forall m \in \mathbb{R}^+ \setminus (d_n), \Delta_N(m) \rightarrow 0$ ie $x^m \in \bar{V}$,

et évidemment, $\forall m \in (d_n)_{n \in \mathbb{N}}, x^m \in V \subset \bar{V}$

En particulier, $\forall m \in \mathbb{N}, x^m \in \bar{V}$,

puis d'après le th de Weierstrass, V est dense ds $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$