Dual de $\mathscr{M}_n(K)$

Référence : FGN algèbre 1, p.329

Théorème :
Soit K un corps. Alors $\mathscr{M}_n(K) \cong (\mathscr{M}_n(K))^*$. De plus, toute forme linéaire f de $\mathscr{M}_n(K)$ vérifiant $f(XY) = f(YX)$ est colinéaire à la trace.

Preuve :

Notons $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(K)$. On a, pour tout $1 \leq i, j, k, l \leq n$: $E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{jk}E_{i,l}$
Soit $A \in \mathscr{M}_n(K)$:

On note $f_A : X \in \mathscr{M}_n(K) \mapsto Tr(AX)$. f est clairement linéaire (la Trace l'est). De plus, comme $dim(\mathscr{M}_n(K)) = dim(\mathscr{M}_n(K)^*) = n^2$, il suffit juste de montrer que f est injective.

$A \in \mathscr{M}_n(K), A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $f_A = 0$.
On a donc pour $1 \leq i_0, j_0 \leq n$:

$$\begin{aligned} 0 = Tr(AE_{i_0j_0}) &= Tr(\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}E_{ij}E_{i_0j_0}) \\ &= Tr(\sum_{i=1}^{n} a_{ii_0}E_{ii_0}E_{i_0j_0}) \\ &= a_{i_0j_0} \end{aligned}$$

Ceci est valable pour tout les i_0, j_0, donc tous les coefficients de A sont nuls, ce qui implique que A est la matrice nulle. L'application f est injective et finalement : $\mathscr{M}_n(K) \cong (\mathscr{M}_n(K))^*$.

Soit maintenant $f \in (\mathscr{M}_n(K))^*$ telle que $f(XY) = f(YX)$ et $A \in \mathscr{M}_n(K)$ telle que $f = f_A$

$$\forall X, Y \in \mathscr{M}_n(K), Tr(AXY) = Tr(AYX) = Tr(XAY)$$

Par linéarité de la trace, on obtient que : $Tr((AX - XA)Y) = 0$.

Ceci étant vrai pour toute matrice Y, alors c'est en particulier vrai pour les matrices de la base de $\mathscr{M}_n(K)$, on obtient que $AX = XA$.
Ainsi, A commute avec toute matrice X, donc en particulier avec les matrices E_{ij}

$$\begin{aligned} AE_{ij} &= \sum_{1 \leq k,l \leq n} a_{kl}E_{kl}E_{ij} \text{ comme } E_{kl}E_{ij} = \delta_{li}E_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}E_{kj} \\ &= E_{ij}A \\ &= \sum_{l=1}^{n} a_{jl}E_{il} \end{aligned}$$

Par unicité de l'écriture $a_{ki} = 0$ pour $k \neq i$ et $a_{ii} = a_{jj}$. Donc A est une matrice scalaire, et finalement $f = f_A$ est colinéaire à la trace.

Application :
Toute hyperplan de $\mathscr{M}_n(K)$ coupe $\mathscr{G}l_n(K)$

Preuve :

Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(K)$. Alors, H est le noyau d'une forme linéaire non-nulle f. Il existe alors $A \in \mathscr{M}_n(K), A \neq 0$, telle que $f = f_A$.

Soit $r = rang(A) \geq 1$:

Alors, il existe P et Q dans $\mathscr{G}l_n(K)$ telles que :

$$A = PJ_rQ \text{ où } J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $X \in \mathscr{M}_n(K)$, $Tr(AX) = Tr(PJ_rQX) = Tr(J_rQXP)$. Il nous suffit de trouver $Y \in \mathscr{G}l_n(K)$ telle que $Tr(J_rY) = 0$ et on posera $X = Q^{-1}YP^{-1}$.
On prend :

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$