

Théorème de Lax-Milgram et application

Références : F. Hirsch, G. Lacombe, *Éléments d'analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.
H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.^[1]

Leçons concernées : 201, 205, 213, 222.

Théorème 1 (Lax-Milgram). *Soit H un espace de Hilbert réel et a une forme bilinéaire sur H continue et coercive, c'est-à-dire telle qu'il existe $C, \alpha > 0$ telles que $\forall x, y \in H$,*

$$|a(x, y)| \leq C \|x\| \|y\| \quad \text{et} \quad a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2$$

alors pour toute forme linéaire continue L de H il existe un unique $u \in H$ tel que $\forall x \in H$

$$L(x) = a(u, x)$$

de plus si a est symétrique, en posant $J(x) = \frac{1}{2} a(x, x) - L(x)$ pour $x \in H$, u est caractérisé par

$$J(u) = \min_{x \in H} J(x).$$

Démonstration. Pour $x \in H$, $y \mapsto a(x, y)$ est une forme linéaire continue, ainsi, par le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur $Tx \in H$ tel que pour tout $y \in H$, $a(x, y) = (Tx|y)$. Pour tout $x, y, z \in H$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(Tx + \lambda Ty|z) = (Tx|z) + \lambda (Ty|z) = a(x, z) + \lambda a(y, z) = a(x + \lambda y, z)$$

et donc par unicité dans le théorème de Riesz $T(x + \lambda y) = Tx + \lambda Ty$ et T est linéaire. De plus, pour $x \in H$, par continuité de a ,

$$\|Tx\|^2 = (Tx|Tx) = a(x, Tx) \leq C \|x\| \|Tx\|$$

et donc $\|Tx\| \leq C$ et T est continu.

On montre alors que T est un isomorphisme : on commence par montrer que $T(H)$ est dense dans H par la caractérisation par l'orthogonal. Soit $z \in T(H)^\perp$, alors en particulier, par coercivité de a ,

$$0 = (Tz|z) = a(z, z) \geq \alpha \|z\|^2 \geq 0$$

et donc $z = 0$. D'autre part, on remarque que pour tout $x \in H$,

$$\|Tx\| \|x\| \geq |(Tx, x)| = a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2$$

et donc $\|Tx\| \geq \alpha \|x\|$. On en déduit que T est injectif. Enfin, si $(y_n)_n \in T(H)^\mathbb{N}$ converge vers $y \in H$, alors $(y_n)_n$ est de Cauchy dans H et donc en notant $x_n \in H$ tel que $y_n = Tx_n$,

1. Merci à Rudy Morel et Michel Nassif pour l'idée du développement et certains éléments de la preuve.

par l'inégalité précédente $(x_n)_n$ est aussi de Cauchy dans H complet, donc converge vers $x \in H$ et par continuité de T , $Tx = y$ de sorte que $T(H)$ est fermé. On peut alors conclure que T est un isomorphisme de H .

Soit maintenant L une forme linéaire continue sur H . Alors par le théorème de Riesz il existe un unique $v \in H$ tel que pour tout $x \in H$, $L(x) = (v|x)$. Ainsi, en notant $u = T^{-1}v$, pour tout $x \in H$, $L(x) = (Tu|x) = a(u, x)$. L'unicité de u s'obtient par l'unicité dans le théorème de Riesz : si pour tout $x \in H$, $L(x) = a(u', x)$, alors pour tout $x \in H$, $L(x) = (Tu', x)$ et donc $Tu' = Tu$ et $u' = u$.

Supposons de plus que a est symétrique, alors pour $v \in H$, si on écrit $v = u + w$, on obtient

$$J(v) = J(u+w) = J(u) + \frac{1}{2} a(w, w) - L(w) + a(u, w) = J(u) + \frac{1}{2} a(w, w) - L(w) + L(w) \geq J(u)$$

par coercivité. De plus si v est aussi minimum de J , alors si $w = u - v$, $J(u) = J(v)$ et par le calcul précédent $a(w, w) = 0$ et donc $w = 0$. $\square$

On applique le théorème de Lax-Milgram pour résoudre une équation différentielle par une méthode variationnelle.

Proposition 2. Soit $I =]0, 1[$, $p \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$, $r, q \in \mathcal{C}^0(\bar{I})$ et $f \in L^2(I)$. On suppose que $p \geq \alpha > 0$, $q \geq 1$ et $r^2 \leq \alpha$, alors il existe une unique solution faible au problème

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f & \text{sur } I \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

c'est-à-dire qu'il existe un unique $u \in H_0^1(I)$ tel que

$$\forall v \in H_0^1(I), \quad \int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I quv = \int_I fv.$$

Démonstration. Étape 1 : on définit la forme bilinéaire a par,

$$a(u, v) = \int_0^1 pu'v' + \int_0^1 ru'v + \int_0^1 quv$$

pour $u, v \in H_0^1$, et la forme linéaire φ par,

$$\varphi(v) = \int_0^1 fv.$$

pour $v \in H_0^1$. Il est immédiat que φ est continue. D'autre part, puisque p, q, r sont continues sur $\bar{I}$ donc bornées, a est aussi continue. Enfin, si $v \in H_0^1$, on a par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$-\int_0^1 rv'v \leq \left| \int_0^1 rv'v \right| \leq \sqrt{\alpha} \|v\|_2 \|v'\|_2$$

et donc

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_0^1 p v'^2 + \int_0^1 r v' v + \int_0^1 q v^2 \geq \alpha \|v'\|_2^2 - \sqrt{\alpha} \|v\|_2 \|v'\|_2 + \|v\|_2^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{2} \|v'\|_2 - \|v\|_2 \right)^2 + \frac{3\alpha}{4} \|v'\|_2^2 \geq \frac{3\alpha}{4} \|v'\|_2^2 \geq \frac{3\alpha}{4C^2} \|v\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

par inégalité de Poincaré et donc a est coercive. On peut ainsi appliquer le théorème de Lax-Milgram pour obtenir l'existence d'une unique solution faible $u \in H_0^1$. $\square$

On voit maintenant comment montrer, avec des hypothèses de régularité, que l'unique solution faible est en fait une solution forte.

Proposition 3. Soit $I =]0, 1[$, $p \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$ et $r, q, f \in \mathcal{C}^0(\bar{I})$. On suppose que $p \geq \alpha > 0$, $q \geq 1$ et $r^2 \leq \alpha$, alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2(\bar{I})$ vérifiant

$$\begin{cases} -(pu')' + ru' + qu = f & \text{sur } I \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Démonstration. Étape 1 : par intégration par parties sur H_0^1 , une solution forte de (2) est une solution faible de (2). La proposition précédente nous assure alors l'existence et l'unicité d'une solution faible $u \in H_0^1(I)$. On a donc unicité de la solution forte, il nous faut maintenant montrer que u est en fait une solution forte.

Étape 2 : puisque $\mathcal{D}(I) \subset H_0^1$ on a, par définition d'une solution faible,

$$-(pu')' + ru' + qu - f = 0 \quad (3)$$

au sens des distributions. Alors $(pu')' = ru' + qu - f \in L^2$ et donc $pu' \in H^1$ et ainsi $u' = \frac{1}{p}pu' \in H^1$. On obtient $u, u' \in \mathcal{C}^0(\bar{I})$ et donc $u \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$. Alors, puisque $(pu')' = p'u' + pu''$,

$$u'' = \frac{1}{p} \left((pu')' - p'u' \right) = \frac{1}{p} \left(ru' + qu - f - p'u' \right) \in \mathcal{C}^0(\bar{I})$$

donc $u' \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$ et par suite, puisque $u \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$, $u \in \mathcal{C}^2(\bar{I})$.

Étape 3 : puisque $u \in \mathcal{C}^2(\bar{I})$, la relation (3) est vérifiée au sens usuel (par injection de $\mathcal{C}^0(\bar{I})$ dans $\mathcal{D}'(I)$) et puisque $u \in H_0^1$, $u(0) = u(1) = 0$ et donc u est une solution classique. $\square$

2. Cela provient de la formule $u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t) dt$ qui relie le représentant continu de u et u' .