

Théorème de Fourier-Plancherel

Référence : W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Dunod, 1998.

Leçons concernées : 201, 202, 207, 234, 235, 250.

Définition 1. Pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ on définit sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(f)(t) = \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ixt} dx.$$

Théorème 2. Il existe un unique isomorphisme $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $f \mapsto \hat{f}$ qui prolonge la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. De plus, pour tout $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on a $(\hat{f}, \hat{g})_{L^2} = 2\pi (f, g)_{L^2}$ et si on note, pour $A > 0$,

$$\varphi_A(t) = \int_{-A}^A f(x)e^{-ixt} dx \quad \text{et} \quad \psi_A(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A \hat{f}(t)e^{ixt} dt$$

alors $\|\varphi_A - \hat{f}\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$ et $\|\psi_A - f\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$.

Lemme 3. Pour $f \in L^2$, l'application

$$y \mapsto \left(\tau_y f : x \mapsto f(y+x) \right)$$

est uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Soit $A > 0$ tel que $\text{supp}(g) \subset [-A, A]$. Soit $\delta > 0$ un module d'uniforme continuité de g pour $(\varepsilon/3A)^{1/2}$. Quitte à restreindre on suppose $\delta < A$. On a alors

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x-t) - g(x-s)|^2 dx < \varepsilon(2A + \delta)/3A \leq \varepsilon$$

et on conclut par inégalité triangulaire. □

Définition 4. On note $H : t \mapsto e^{-|t|}$ qui appartient à $L^1 \cap L^2$, et pour $\lambda > 0$,

$$h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)e^{itx} dt.$$

Après calculs, on trouve

$$h_\lambda(x) = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + x^2}$$

et donc

$$\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) dx = 2\pi. \tag{1}$$

Démonstration. On a, pour $\lambda > 0$,

$$h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|\lambda t|} e^{itx} dt = \int_{-\infty}^0 e^{t(\lambda+ix)} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t(\lambda-ix)} dt = \frac{1}{\lambda+ix} + \frac{1}{\lambda-ix} = \frac{2\lambda}{\lambda^2+x^2}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{2\lambda}{\lambda^2+x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{1+y^2} dy = 2[\arctan(y)]_{-\infty}^{+\infty} = 2\pi.$$

□

Proposition 5. Si $f \in L^1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt} dt.$$

Démonstration. Par le théorème de Fubini, on obtient,

$$\begin{aligned} f * h_\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y) \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{it(x-y)} dt dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{itx} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-ity} dy dt = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{f}(t) e^{ixt} dt. \end{aligned}$$

□

Proposition 6. Si $g \in L^\infty$ et est continue en $x \in \mathbb{R}$, alors

$$g * h_\lambda(x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 2\pi g(x).$$

Démonstration. On a, avec (I),

$$\begin{aligned} g * h_\lambda(x) - 2\pi g(x) &= \int_{\mathbb{R}} (g(x-y) - g(x)) h_\lambda(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} (g(x-y) - g(x)) \frac{1}{\lambda} h_1(y/\lambda) dy = \int_{\mathbb{R}} (g(x-\lambda s) - g(x)) h_1(s) ds \end{aligned}$$

et cette dernière intégrale tend vers 0 lorsque $\lambda \rightarrow 0$ par convergence dominée en utilisant la continuité de g en x . □

Proposition 7. Si $f \in L^2$, $\|f * h_\lambda - 2\pi f\|_2 \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$.

Démonstration. On a, d'après (I), pour $x \in \mathbb{R}$

$$f * h_\lambda(x) - 2\pi f(x) = \int_{\mathbb{R}} (f(x-y) - f(x)) h_\lambda(y) dy$$

et donc, par inégalité de Jensen,

$$\left(f * h_\lambda(x) - 2\pi f(x)\right)^2 = 4\pi^2 \left(\frac{1}{2\pi} \left[f * h_\lambda(x) - 2\pi f(x)\right]\right)^2 \leq 4\pi^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(f(x-y) - f(x)\right)^2 h_\lambda(y) dy\right)$$

on intègre alors par rapport à x et on applique le théorème de Fubini-Tonelli pour obtenir :

$$\|f * h_\lambda - 2\pi f\|_2 \leq 2\pi \int_{\mathbb{R}} \|\tau_{-y}f - f\|_2^2 h_\lambda(y) dy$$

or si on pose $g(y) = \|\tau_{-y}f - f\|_2^2$ le lemme préliminaire nous assure que g est bornée, continue et que $g(0) = 0$ et en remarquant que

$$\int_{\mathbb{R}} \|\tau_{-y}f - f\|_2^2 h_\lambda(y) dy = g * h_\lambda(0)$$

on peut appliquer la proposition précédente pour obtenir la convergence souhaitée. $\square$

Démonstration (Théorème). Étape 1 : on commence par montrer que pour tout $f \in L^1 \cap L^2$, $\|\hat{f}\|_2 = \sqrt{2\pi}\|f\|_2$. Soit $f \in L^1 \cap L^2$ et $\tilde{f} : x \mapsto \overline{f(-x)}$. On pose $g = f * \tilde{f}$. On a

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \overline{f(-y)} dy = \int_{\mathbb{R}} f(x+y) \overline{f(y)} dy = (\tau_x f, f).$$

On déduit de cette expression que g est continue, grâce au lemme préliminaire et la continuité du produit scalaire par rapport à la première variable. D'autre part par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|g(x)| \leq \|\tau_x f\|_2 \|f\|_2 = \|f\|_2^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ et donc g est bornée. Enfin, par propriété du produit de convolution, puisque f et $\tilde{f}$ sont L^1 , g est L^1 . Ainsi, par la proposition 5,

$$g * h_\lambda(0) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{g}(t) dt.$$

Or, puisque $\hat{g} = \widehat{f\tilde{f}} = \widehat{\tilde{f}f} = |\hat{f}|^2$, on peut appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \hat{g}(t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^2 dt$$

Et d'autre part grâce à la proposition 6,

$$g * h_\lambda(0) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 2\pi g(0) = 2\pi \|f\|_2^2$$

d'où le résultat.

Étape 2 : on note alors $Y = \mathcal{F}(L^1 \cap L^2)$ et on montre que Y est dense dans L^2 en montrant que $Y^\perp = \{0\}$. On remarque que pour tout $\lambda > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$h_\lambda(\alpha - t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\alpha x} H(\lambda x) e^{-itx} dx$$

et donc $t \mapsto h_\lambda(\alpha - t) \in Y$ comme transformée de Fourier de $x \mapsto e^{i\alpha x} H(\lambda x)$ qui est dans $L^1 \cap L^2$. Ainsi, si $w \in Y^\perp$, alors pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$h_\lambda * \bar{w}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} h_\lambda(\alpha - t) \bar{w}(t) dt = 0$$

et donc $h_\lambda * \bar{w} = 0$, et en appliquant la proposition 7 on obtient $\bar{w} = 0$ et donc $w = 0$.

Étape 3 : puisque $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \rightarrow Y$ est une isométrie (en renormalisant L^2 à l'arrivée) entre deux sous-espaces denses de L^2 , il existe une unique isométrie $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ qui prolonge la transformée de Fourier. On déduit alors la formule de Parseval avec l'identité de polarisation.

Étape 4 : enfin, on note $k_A = \mathbb{1}_{[-A, A]}$ pour $A > 0$. Si $f \in L^2$, alors $fk_A \in L^1 \cap L^2$, et $\varphi_A = \widehat{fk_A}$ et donc

$$\|\widehat{f} - \varphi_A\|_2 = \|\widehat{f - fk_A}\|_2 = \sqrt{2\pi} \|f - fk_A\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

par convergence dominée. De la même manière, par inversion de Fourier dans L^1 , $\psi_A = \mathcal{F}^{-1}(k_A \mathcal{F}(f))$ et donc

$$\begin{aligned} \|f - \psi_A\|_2 &= \|\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)) - \mathcal{F}^{-1}(k_A \mathcal{F}(f))\|_2 \\ &= \left\| \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f) - k_A \mathcal{F}(f)) \right\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathcal{F}(f) - k_A \mathcal{F}(f)\|_2 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

par convergence dominée. □