

Sous-groupes distingués et table de caractères

Références : F. Ulmer, *Théorie des groupes*, Ellipses, 2012.
G. Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*, Ellipses, 2004.

Leçons concernées : 103, 104, 107.

Théorème 1. Soit G un groupe fini. Pour χ un caractère de G on note $\ker \chi := \{g \in G, \chi(g) = \chi(e)\}$. Alors si $\chi_1, \dots, \chi_m$ sont les caractères irréductibles de G , tout sous-groupe distingué H de G est de la forme $H = \bigcap_{j \in J} \ker \chi_j$, où $J \subset [1, m]$.

Lemme 2. Pour un caractère χ associé à la représentation (ρ, V) , on a $|\chi(g)| \leq |\chi(e)|$ pour tout $g \in G$ et $\ker \chi = \ker \rho$.

Démonstration. Soit $g \in G$. On note $n = \dim V$. On sait que $\rho(g)$ est diagonalisable à valeurs propres des racines de l'unité. Ainsi, $\chi(g) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ avec $\lambda_i \in \mathbb{U}$. Alors, par inégalité triangulaire,

$$|\chi(g)| = \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| = n = |\chi(e)|$$

avec égalité si et seulement si tous les λ_i sont égaux. Ainsi, $\chi(g) = \chi(e)$ si et seulement si $\lambda_i = 1$ pour $i \in [1, n]$ et donc $\rho(g) = \text{id}$, c'est-à-dire $g \in \ker \rho$. $\square$

Démonstration (Théorème). D'après le lemme, tous les ensembles de cette forme sont bien des sous-groupes distingués. Réciproquement, on se donne H distingué dans G .

Étape 1 : H est le noyau d'un caractère. On considère la représentation régulière de G/H de morphisme structurel $\psi : G/H \rightarrow \text{GL}_{[G:H]}(\mathbb{C})$ et on note alors $\varphi = \psi \circ \pi : G \rightarrow \text{GL}_{[G:H]}(\mathbb{C})$ la représentation de G ainsi obtenue. Puisque la représentation régulière est fidèle, on a $\ker \psi = H$ d'où le résultat.

Étape 2 : on note $V = \bigoplus_{i=1}^s \alpha_i V_i$ la décomposition de V en somme directe de G -modules irréductibles. On a alors $\chi = \sum_{i=1}^s \chi_i$ où χ_i est le caractère irréductible associé à V_i . Et donc, d'après le lemme préliminaire,

$$|\chi(g)| = \left| \sum_{i=1}^s \chi_i(g) \right| \leq \sum_{i=1}^s |\chi_i(g)| \leq \sum_{i=1}^s |\chi_i(e)| = \sum_{i=1}^s \dim V_i = \dim V = \chi(e).$$

Ainsi, si $g \in \ker \chi$, il y a égalité dans l'inégalité précédente, c'est-à-dire que $|\chi_i(g)| = |\chi_i(e)|$ pour tout i , et donc $\chi(g) = \chi(e)$, de sorte que $g \in \ker \chi_i$ pour tout i , d'où le résultat. $\square$

Application 3. Les sous-groupes distingués du groupe diédral $D_6 = \langle r, s \mid r^6, s^2, sr sr \rangle$ sont $\{e\}$, $\langle r \rangle$, $\langle r^2, s \rangle$, $\langle r^2, rs \rangle$, $\langle r^3 \rangle$ et D_6 .

Démonstration. On commence par déterminer la table de caractères de D_6 . Le groupe D_6 possède 6 classes de conjugaisons $\{e\}$, $\{r, r^5\}$, $\{r^2, r^4\}$, $\{r^3\}$, $\{s, r^2s, r^4s\}$ et $\{rs, r^3s, r^5s\}$.

Étape 1 : on commence par chercher des représentations de degré 1. Leur caractère χ vérifie $1 = \chi(e) = \chi(s^2) = \chi(s)^2$, donc $\chi(s) \in \{\pm 1\}$. De même $\chi(sr)^2 = 1$ et donc puisque $\chi(sr) = \chi(s)\chi(r)$, $\chi(r) \in \{\pm 1\}$. Enfin, $\chi(r)^6 = 1$ ne rajoute pas de conditions, et on obtient alors 4 représentations de degré 1.

Étape 2 : on sait que les degré n_1, n_2 des deux représentations restantes vérifient $4 + n_1^2 + n_2^2 = 12$, et donc $n_1 = n_2 = 2$. On pose $\omega = e^{i\pi/3}$ et on considère pour $h = 1, 2$ les représentations ρ_h données par

$$\rho_h(r) = \begin{pmatrix} \omega^h & 0 \\ 0 & \omega^{-h} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho_h(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$\rho_h(sr^k) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^{hk} \\ \omega^{-hk} & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors $\chi_h(r^k) = 2 \cos(hk\pi/3)$ et $\chi_h(sr^k) = 0$. On peut alors vérifier que les caractères sont irréductibles.

Étape 3 : on obtient la table de caractères

	1	2	2	1	3	3	
	$\{e\}$	$\{r, r^5\}$	$\{r^2, r^4\}$	$\{r^3\}$	$\{s, r^2s, r^4s\}$	$\{rs, r^3s, r^5s\}$	
ψ_1	1	1	1	1	1	1	D_6
ψ_2	1	1	1	1	-1	-1	$\langle r \rangle$
ψ_3	1	-1	1	-1	1	-1	$\langle r^2, s \rangle$
ψ_4	1	-1	1	-1	-1	1	$\langle r^2, rs \rangle$
χ_1	2	1	-1	-2	0	0	$\{e\}$
χ_2	2	-1	-1	2	0	0	$\langle r^3 \rangle$

D'autre part $\ker \psi_3 \cap \ker \psi_4 = \langle r^2 \rangle$, et les autres intersections ne donnent pas de nouveau groupe distingué, on obtient bien le résultat annoncé. $\square$