Optimisation dans un Hilbert

Référence : P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1982,
G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, Éditions de l'École Polytechnique, 2005[1].

Leçons concernées : 205, 208, 213, 219, 229, 253, *201, 203*.

Théorème 1 (Banach-Alaoglu)**.** *Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $(T_n)_n$ une suite bornée de H', alors il existe $T \in H'$ et une extractrice φ telle que $(T_{\varphi(n)})_n$ converge faiblement vers T, c'est-à-dire que pour tout $x \in H$,*

$$T_{\varphi(n)}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T(x).$$

Démonstration. Étape 1 : on se donne $(x_k)_k$ une suite dense de H. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(T_n(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $M\,||x_k||$, où on a noté $M = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||$. Le procédé d'extraction diagonale nous assure ainsi l'existence d'une sous-suite de $(T_n)_n$ que l'on notera encore $(T_n)_n$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(T_n(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $T(x_k)$.

Étape 2 : on montre que $(T_n(x))_n$ converge pour tout $x \in H$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit x_k tel que $||x - x_k|| < \varepsilon$. Pour $p, q \geqslant 0$

$$|T_p(x) - T_q(x)| \leqslant |T_p(x) - T_p(x_i)| + |T_p(x_i) - T_q(x_i)| + |T_q(x_i) - T_q(x)|,$$

or, $|T_p(x) - T_p(x_i)| \leqslant M||x - x_i||$, $|T_q(x) - T_q(x_i)| \leqslant M||x - x_i||$, et par le point précédent, il existe $N \geqslant 0$ tel que pour $p, q \geqslant N$, $|T_p(x_i) - T_q(x_i)| < \varepsilon$. Ainsi, pour $p, q \geqslant N$,

$$|T_p(x) - T_q(x)| < (2M + 1)\varepsilon.$$

La suite $(T_n(x))_n$ est donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et converge ainsi vers une limite notée $T(x)$.

Étape 3 : comme limite de fonction linéaire, T est linéaire. D'autre part, pour $x \in H$,

$$|T(x)| = |\lim_{n\to+\infty} T_n(x)| \leqslant M||x||$$

et donc $T \in H'$, ce qui conclut la preuve du théorème. □

Théorème 2. *Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $J : H \to \mathbb{R}$ un fonction continue, convexe, et coercive, au sens où*

$$\lim_{||x||\to+\infty} J(x) = +\infty.$$

Alors il existe un minimum de J sur H.

1. La démonstration n'est faite de cette façon dans aucune des références, il faut adapter. Se reporter au développement rédigé d'Antoine Mouzard. Merci également à Michel Nassif pour ce développement.

Démonstration. Étape 1 : soit $(u_n)_n$ une suite minimisante. Puisque H est non vide, $\inf_{x \in H} J(x) < +\infty$, et donc par coercivité de J, $(u_n)_n$ est bornée. Ainsi, d'après le théorème de Banach-Alaoglu et le théorème de Riesz, quitte à extraire, $(u_n)_n$ converge faiblement vers $u \in H$.

Étape 2 : on prends $\alpha > \inf_{x \in H} J(x)$ et on pose $C_\alpha := \{x \in H \mid J(x) \leqslant \alpha\}$. La partie C_α est fermée car J est continue et convexe car J est convexe. Puisque $\lim J(u_n) = \inf_{x \in H} J(x) < \alpha$, $u_n \in C_\alpha$ à partir d'un certain rang, et en particulier C_α est non vide. On applique alors le théorème de projection à C_α sur H, et on note P_α le projection. À partir d'un certain rang, d'après le théorème de projection,

$$< u - P_\alpha(u), u_n - P_\alpha(u) > \leqslant 0.$$

On passe alors à la limite pour obtenir $||u - P_\alpha(u)||^2 = 0$, et donc $u = P_\alpha(u) \in C_\alpha$, c'est-à-dire que $J(u) \leqslant \alpha$. On a donc,

$$\forall \alpha > \inf_{x \in H} J(x), \quad J(u) \leqslant \alpha$$

et ainsi $J(u) = \inf_{x \in H} J(x)$. □

Remarque. L'hypothèse H séparable n'est pas nécessaire, puisque dans la preuve de la compacité faible on peut considérer $E = \overline{\mathrm{Vect}(u_n, n \in \mathbb{N})}$ qui est un Hilbert séparable et conclure avec $H = E \oplus E^\perp$. On peut également minimiser J sur K un convexe fermé non vide au lieu de H, il faut pour cela montrer que la limite faible obtenue est dans K, ce qui se fait avec le théorème de la projection, de la même manière que dans l'étape 2 de la preuve.

Application 3. *Soit $f \in L^2(0,1)$, et $p \geqslant 1$. Alors il existe une unique fonction $u \in H_0^1(0,1)$ telle que*

$$-u'' + |u|^{p-1}u = f \tag{1}$$

dans $L^2(0,1)$.

Démonstration. On introduit la fonctionnelle $J : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ définie par

$$J(u) = \int_0^1 \Big(\frac{1}{2} u'(x)^2 + \frac{|u(x)|^{p+1}}{p+1} - f(x)u(x) \Big) dx$$

pour $u \in H_0^1$. On remarque tout d'abord que J est différentiable de différentielle[2]

$$dJ(u)(v) = \int_0^1 \Big(u'(x)v'(x) + |u(x)|^{p-1}u(x)v(x) - f(x)u(x) \Big) dx.$$

En particulier J est continue. D'autre part, puisque la dérivation est linéaire et que toute les fonctions de u et de u' intervenant dans l'intégrale qui définit J sont convexes, J est

2. Cela demande un calcul non évident.

convexe. On montre alors que J est strictement convexe. Soit $\lambda \in]0,1[$, et $u, v \in H_0^1$. Si $J(\lambda u + (1-\lambda)v) = \lambda J(u) - (1-\lambda)J(v)$, alors puisque J est convexe, en particulier,

$$\int_0^1 |\lambda u(x) + (1-\lambda)v(x)|^{p+1} dx = \int_0^1 \lambda |u(x)|^{p+1} + (1-\lambda)|v(x)|^{p+1} dx$$

ce qui implique, par convexité de la fonction $t \mapsto |t|^{p+1}$ (si l'intégrale d'une fonction positive est nulle alors la fonction est nulle presque partout), que presque partout,

$$|\lambda u(x) + (1-\lambda)v(x)|^{p+1} = \lambda |u(x)|^{p+1} + (1-\lambda)|v(x)|^{p+1}$$

et donc, par strict convexité de $t \mapsto |t|^{p+1}$, $u = v$ presque partout, et on a montré la strict convexité de J.

On voit que $u \in H_0^1$ est solution de (1) si et seulement si $dJ(u)(v) = 0$, et donc, par convexité de J, $u \in H_0^1$ est solution de (1) si et seulement si u est un minimum de J sur H_0^1. Si on montre que J est coercive, on obtient alors l'existence en appliquant le théorème précédent, et l'unicité par strict convexité.

On a en effet, par inégalité de Cauchy-Schwarz, puis par inégalité de Poincaré,

$$J(u) \geqslant \int_0^1 \frac{1}{2} u'(x)^2 dx - ||u||_2 ||f||_2 \geqslant C||u||_{H^1}^2 - ||f||_2 ||u||_{H^1} \underset{||u|| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

$\square$