Leçons :
190 : Méthodes combinatoires, pb de dénombrement
241 : suites & séries de fc°
243 : cv séries entières
247 : ex de pb d'interversion de limites

Nombres de Bell

14

Référence : FGN Algèbre 1

Thm : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ et on pose $B_0 = 1$.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{k!}$

preuve :

① Premiers termes et formule de récurrence

On calcule $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1,n+1]\!]$. On note E_k l'ensemble des partitions de $[\![1,n+1]\!]$ pour lesquelles la partie de $[\![1,n+1]\!]$ contenant $n+1$ est de cardinal k.

On a $\{\text{partitions de } [\![1,n+1]\!]\} = \coprod_{k \in [\![1,n+1]\!]} E_k$

D'où $\text{card}\{\text{partitions de } [\![1,n+1]\!]\} = \sum_{k=1}^{n+1} \text{card } E_k$

ie $B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \text{card } E_k = \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{\binom{n}{k-1}}_{\text{choix des élément de la partie contenant } n+1\text{, notée } A} \underbrace{B_{n+1-k}}_{\text{choix des partitions de } [\![1,n+1]\!] \setminus A} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$

D'où $\boxed{B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k}$ car $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$

② Série génératrice

On considère la série entière $\sum \frac{B_n}{n!} x^n$ (réelle). On veut montrer que son rayon de convergence R est strictement positif.

<u>lemme</u> : $\forall n \in \mathbb{N}$ $B_n \leq n!$ On injecte $\{\text{partitions de } [\![1,n]\!]\} \hookrightarrow S_n$
$(P_1, \dots, P_k) \mapsto \text{cycle}_{P_1} \circ \text{cycle}_{P_2} \circ \dots \circ \text{cycle}_{P_k}$

preuve du lemme par récurrence : $B_0 \leq 0!$, $B_1 \leq 1!$, $B_2 \leq 2!$, $B_3 \leq 3!$
Soit $n \geq 3$ et supposons que $B_k \leq k!$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$

Alors $B_{n+1} \underset{\underset{\text{par } 1}{\uparrow}}{\leqslant} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant e\, n! \underset{\underset{e \leqslant 3 \leqslant n+1}{\uparrow}}{\leqslant} (n+1)!$

D'où le lemme □

On en déduit que $\underline{\underline{R \geqslant 1}}$..

On pose $\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{B_n}{n!} x^n$, f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et

$\forall x \in]-1,1[\quad f'(x) = \sum_{n \geqslant 1} n \frac{B_n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \right) x^n = e^x f(x)$

C'est une EDO linéaire du premier ordre en dimension 1 : $f(x) = f(0) \frac{1}{e} e^{e^x} = \frac{1}{e} e^{e^x}$

③ Etude de $x \mapsto e^{e^x}$

La série entière définissant exp a un rayon de convergence infini donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$e^{e^x} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{(e^x)^n}{n!} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{e^{nx}}{n!} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \sum_{k \geqslant 0} \frac{(nx)^k}{k!} = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{k \geqslant 0} \frac{(nx)^k}{n!\, k!} = \sum_{n \geqslant 0} \sum_{k \geqslant 0} u_{n,k}(x)$$

On veut appliquer Fubini : soit $x \in \mathbb{R}$ fixé

$$\sum_{n \geqslant 0} \sum_{k \geqslant 0} |u_{n,k}(x)| = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \sum_{k \geqslant 0} \frac{(n|x|)^k}{k!} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} e^{n|x|} = e^{e^{|x|}} < +\infty$$

On peut donc intervertir les sommes : $e^{e^x} = \sum_{k \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 0} \frac{n^k x^k}{n!\, k!} = \sum_{k \geqslant 0} \left[\frac{1}{k!} \sum_{n \geqslant 0} \frac{n^k}{n!} \right] x^k$

La convergence est absolue et valable pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{n \geqslant 0} \frac{B_n}{n!} x^n = \frac{1}{e} \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k \geqslant 0} \frac{k^n}{k!} \right) x^n$$

Par unicité du DSE : $\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n = \sum_{k \geqslant 0} \frac{k^n}{k!}$