Inversion de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Référence : J.M. Bony, *Cours d'analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier*, les Éditions de l'École Polytechnique, 2001.

Leçons concernées : 234, 235, 236, 239, 250.

Lemme 1. *Soit $\chi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \chi(x)dx = 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$ soit $\chi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d}\chi(x/\varepsilon)$. Alors pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $f * \chi_\varepsilon$ converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. On commence par démontrer le résultat pour $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$. On prend $R > 0$ tel que $\mathrm{supp}(f) \subset [-R, R]^d$. Soit $\alpha > 0$, par uniforme continuité, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}^d, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \alpha$, et on suppose $\delta < 1$. On remarque alors que par un changement de variables on a $f * \chi_\varepsilon\ (x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - \varepsilon t)\chi(t)dt$. On écrit donc, avec $\int_{\mathbb{R}^d} \chi(x)dx = 1$ et par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f * \chi_\varepsilon\ (x) - f(x)|\, dx &\leqslant \iint_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x - \varepsilon t) - f(x)||\chi(t)|dtdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\chi(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - \varepsilon t) - f(x)|dx \right) dt \\
&= \int_{|t|<\delta/\varepsilon} |\chi(t)| \left(\int_{[-R-1,R+1]} |f(x - \varepsilon t) - f(x)|dx \right) dt \\
&+ \int_{|t|>\delta/\varepsilon} |\chi(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x - \varepsilon t) - f(x)|dx \right) dt \\
&\leqslant \int_{|t|<\delta/\varepsilon} |\chi(t)| \left(\int_{[-R-1,R+1]} \alpha dx \right) dt + 2 \int_{|t|>\delta/\varepsilon} |\chi(t)|||f||_1 dt \\
&\leqslant (2R + 2)||\chi||_1\alpha + 2||f||_1 \int_{|t|>\delta/\varepsilon} |\chi(t)|dt.
\end{aligned}$$

Or puisque $\chi \in L^1(\mathbb{R}^d)$, l'intégrale restante tend vers 0 lorsque ε tend vers 0, ainsi, il existe $\beta > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \beta$, $\int_{|t|>\delta/\varepsilon} |\chi(t)|dt < \alpha$ et on obtient donc la convergence voulue dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. On obtient alors le résultat voulu par densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, en utilisant la linéarité de la convolution, et l'inégalité, pour deux fonctions $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ $||f * g||_1 \leqslant ||f||_1||g||_1$, et par inégalité triangulaire. □

Définition 2. Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on définit sa transformée de Fourier comme la fonction

$$\widehat{f}(x) = \mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-it\cdot x} f(t)dt.$$

Théorème 3. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors, presque partout,*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot t} \widehat{f}(t) dt.$$

Proposition 4. *Soit $a > 0$, alors*

$$\mathcal{F}\left(t \mapsto e^{-a|t|^2}\right)(x) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} e^{-|x|^2/4a}.$$

Démonstration. On pose $g(x) := \mathcal{F}\left(e^{-t^2}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-t^2} dt$. On vérifie facilement avec le théorème de dérivation sous le signe intégrale que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et que $g'(x) = \int_{\mathbb{R}} -ite^{-itx} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} ie^{-itx}(-2te^{-t^2}) dt = -x\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} e^{-t^2} dt$ par intégration par parties. Ainsi g vérifie $2g'(x) - xg(x) = 0$ et donc $g(x) = \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}$ puisque $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

D'autre part, si $f \in L^1(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{F}\left(t \mapsto f(\lambda t)\right)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t\lambda) dt = \left|\frac{1}{\lambda}\right| \int_{\mathbb{R}} e^{-it\cdot x/\lambda} f(t) dt = \left|\frac{1}{\lambda}\right| \mathcal{F}(f)\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

par changement de variables, d'où la formule voulue en dimension 1.

La dimension supérieure s'obtient facilement par le théorème de Fubini en remarquant que l'on peut écrire $e^{-a|t|^2} = e^{-at_1^2} \cdots e^{-at_d^2}$. □

Démonstration (Théorème). Étape 1 : on remarque que

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot t} \widehat{f}(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{it\cdot(x-y)} f(y) dy \right) dt$$

mais on ne peut pas appliquer le théorème de Fubini. On pose donc pour $\varepsilon > 0$,

$$I_\varepsilon(x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y)\cdot t} e^{-\varepsilon^2|t|^2/4} f(y) dt dy.$$

On peut maintenant appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\cdot t} e^{-\varepsilon^2|t|^2/4} f(y) dy dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot t} e^{-\varepsilon^2|t|^2/4} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot t} f(y) dy \right) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot t} e^{-\varepsilon^2|t|^2/4} \widehat{f}(t) dt. \end{aligned}$$

On applique alors le théorème de convergence dominée puisque par hypothèse $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour obtenir :

$$I_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot t} \widehat{f}(t) dt.$$

Étape 2 : d'autre part, si on intègre d'abord par rapport à t, on obtient

$$I_\varepsilon(x) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} G_\varepsilon(x-y) f(y) dy = G_\varepsilon * f\ (x).$$

En posant $G_\varepsilon(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iz\cdot t} e^{-\varepsilon^2 |t|^2/4} dt$.

Étape 3 : or, d'après la proposition précédente,

$$G_\varepsilon(z) = \frac{1}{(2\pi)^d} \left(\frac{4\pi}{\varepsilon^2}\right)^{d/2} e^{-|z|^2/\varepsilon^2} = \varepsilon^{-d} G_1(z/\varepsilon)$$

avec $G_1(z) = \pi^{-d/2} e^{-|z|^2}$ dont on remarque qu'elle est d'intégrale 1. Ainsi, la famille $(G_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifie les hypothèses du lemme. On obtient alors une convergence L^1 de I_ε vers f, donc une convergence simple presque partout à une sous-suite près. On a donc le résultat. □

Application 5. *La fonction caractéristique de la loi de Cauchy est*

$$\varphi(t) = e^{-|t|}.$$

Démonstration. On commence par calculer la fonction caractéristique de la loi de Laplace, c'est-à-dire la transformée de Fourier de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2} e^{-|x|} \in L^1(\mathbb{R})$: pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-|x|}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\xi)}\, dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{+\infty} e^{-x(1+i\xi)}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-i\xi}\, e^{x(1-i\xi)}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2} \left[\frac{-1}{1+i\xi}\, e^{-x(1+i\xi)}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi}\right) \\
&= \frac{1}{1+\xi^2} = \pi g(\xi)
\end{aligned}$$

où $g \in L^1(\mathbb{R})$ est la densité de la loi de Cauchy. On cherche donc à calculer $\widehat{g}(x) = \frac{1}{\pi} \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x)$. Or, d'après la formule d'inversion, pour $h \in L^1$ telle que $\widehat{h} \in L^1$,

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(x))(x) = 2\pi\, h(-x)$$

et donc $\widehat{g}(x) = 2f(-x) = e^{-|x|}$. □