

Formule des compléments

Référence : E. Amar, E. Matheron, *Analyse complexe*, Cassini, 2004.

Leçons concernées : 235, 236, 239, 245.

Théorème 1. *La fonction Γ définie par*

$$\forall z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\} \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

vérifie

$$\forall z \in \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(z) < 1\} \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Démonstration. D'après le théorème de prolongement analytique, il suffit de montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$. Soit alors $\alpha \in]0, 1[$. D'après le théorème de Fubini-Tonelli, si $U = \{(t, s) \in \mathbb{R}^d \mid s > 0, t > 0\}$,

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) &= \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \int_0^{+\infty} s^{-\alpha} e^{-s} ds \\ &= \int_U t^{\alpha-1} s^{-\alpha} e^{-t-s} dt ds = \int_U \left(\frac{t}{s}\right)^{\alpha} e^{-(t+s)} ds \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

On réalise alors le changement de variables $\varphi : (t, s) \mapsto (u, v) = \left(s + t, \frac{s}{t}\right)$ qui est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U sur U d'inverse $\varphi^{-1}(u, v) = \left(\frac{u}{1+v}, \frac{uv}{1+v}\right)$. Le jacobien de φ en (t, s) est :

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{t} & -\frac{s}{t^2} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{t} + \frac{s}{t^2} = \frac{1}{t} + \frac{v}{t} = \frac{1+v}{t}.$$

On a donc, par le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_U v^{-\alpha} e^{-u} \frac{du dv}{1+v} = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^{\alpha}(1+v)} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \int_0^{+\infty} \frac{dv}{v^{\alpha}(1+v)}$$

et on conclut à l'aide du lemme suivant. □

Lemme 2. *Pour tout $\alpha \in]0, 1[$, on a*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}(1+t)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

Démonstration. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On note $I_\alpha = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$ dont on remarque qu'elle est bien définie comme l'intégrale de la fonction $u(t) = \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ positive. On a de plus $I_\alpha < +\infty$ puisque u est continue sur $]0, +\infty[$, et que $u(t) \sim_0 \frac{1}{t^\alpha}$ intégrable en 0 et $u(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}$ intégrable en $+\infty$.

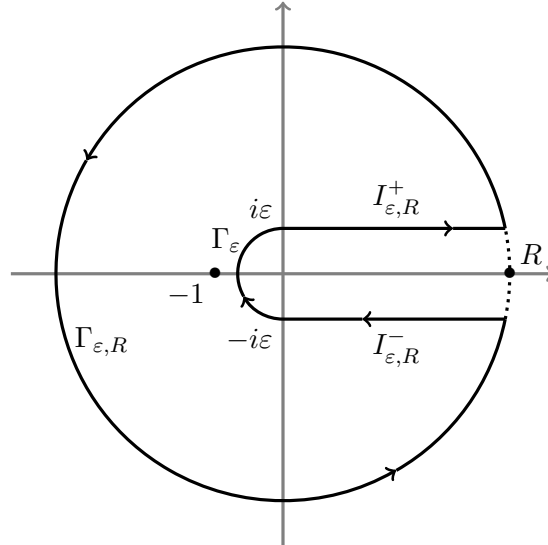
On considère alors $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ et la fonction f définie sur $\Omega \setminus \{-1\}$ par

$$f(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$$

où l'on convient que $z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\theta}$ si $z = re^{i\theta}$ avec $0 < \theta < 2\pi$. La fonction f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{-1\}$ avec un pôle simple en -1 de résidu

$$\text{res}(f, -1) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}.$$

Pour $R > 1$ et $0 < \varepsilon < 1$ on définit alors le chemin orienté $I_{\varepsilon,R}^- \cup \Gamma_\varepsilon \cup I_{\varepsilon,R}^+ \gamma_{\varepsilon,R} = \Gamma_{\varepsilon,R}$ où $I_{\varepsilon,R}^- = [-i\varepsilon, -i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$, $\Gamma_\varepsilon = \{e^{i\theta} \mid \pi/2 < \theta < 3\pi/2\}$, $I_{\varepsilon,R}^+ = [i\varepsilon, i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$ et $\Gamma_{\varepsilon,R} = \{Re^{i\theta} \mid \theta \in [-\pi, \pi], |\theta| > \theta_{\varepsilon,R}\}$ avec $\theta_{\varepsilon,R} = \arctan(\varepsilon/\sqrt{R^2 - \varepsilon^2})$.



Puisque -1 est à l'intérieur de $\gamma_{\varepsilon,R}$, le théorème des résidus donne

$$\int_{\gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}.$$

- Sur Γ_ε , on a

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} f(z)dz \right| \leq \frac{1}{\varepsilon^\alpha(1+\varepsilon)} \times \pi\varepsilon = \frac{\pi\varepsilon^{1-\alpha}}{1+\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

- sur $\Gamma_{\varepsilon,R}$, on a

$$\left| \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z) dz \right| \leq \frac{1}{R^\alpha(1+R)} \times (2\pi R - 2\theta_{\varepsilon,R}) \leq \frac{2\pi R^{1-\alpha}}{1+R} \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0,$$

- sur $I_{\varepsilon,R}^+$, on a

$$\int_{I_{\varepsilon,R}^+} f(z) dz = \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} f(i\varepsilon + t) dt = \int_0^{\sqrt{R^2-\varepsilon^2}} \frac{dt}{(i\varepsilon + t)^\alpha(1 + i\varepsilon + t)}$$

or $(i\varepsilon + t)^\alpha \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} t^\alpha$. Ainsi, avec

$$\begin{aligned} & \cdot \mathbb{1}_{]0, \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]} f(i\varepsilon + t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \mathbb{1}_{]0, R]} \frac{1}{t^\alpha(1+t)} \\ & \cdot \left| \mathbb{1}_{]0, \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]} f(i\varepsilon + t) \right| \leq \mathbb{1}_{]0, R]} \frac{1}{t^\alpha(1+t)} \text{ intégrable,} \end{aligned}$$

on obtient par convergence dominée

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{I_{\varepsilon,R}^+} f(z) dz = \int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$$

et donc

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{I_{\varepsilon,R}^+} f(z) dz = I_\alpha.$$

- De la même manière, puisque $(-i\varepsilon + t)^\alpha \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} e^{2i\pi\alpha} t^\alpha$, on a par convergence dominée

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{I_{\varepsilon,R}^-} f(z) dz = e^{-2i\pi\alpha} I_\alpha.$$

On conclut : d'après l'orientation du chemin, on a $(1 - e^{-2i\pi\alpha})I_\alpha = 2i\pi e^{-i\pi\alpha}$ et donc

$$I_\alpha = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

□