

Formule de Poisson discrète

Référence : G. Peyré, *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*, Ellipses, 2004.

Leçons concernées : 110.

Définition 1. Soit G un groupe abélien fini. On note $\mathbb{C}[G]$ l'espace des fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{C}$. Pour $f \in \mathbb{C}[G]$, on définit ses coefficients de Fourier $c_f(\chi) = \langle f, \chi \rangle$ et sa transformée de Fourier $\hat{f}$ comme, pour $\chi \in \hat{G}$

$$\hat{f}(\chi) = |G|c_f(\bar{\chi}) = \sum_{g \in G} f(g)\chi(g).$$

On a ainsi un morphisme (qui est en fait un isomorphisme)

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[G] & \rightarrow & \mathbb{C}[\hat{G}] \\ f & \mapsto & \hat{f}. \end{array}$$

Proposition 2. Pour G un groupe abélien fini, et pour $f \in \mathbb{C}[G]$, on a la formule d'inversion de Fourier suivante :

$$f = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \hat{G}} \hat{f}(\chi)\chi^{-1} = \sum_{\chi \in \hat{G}} c_f(\chi)\chi = \sum_{\chi \in \hat{G}} \langle f, \chi \rangle \chi.$$

On se donne G un groupe abélien fini, H un sous-groupe de G , et $f \in \mathbb{C}[G]$.

Définition 3. On note $H^\#$ le sous groupe de $\hat{G}$ défini par

$$H^\# = \{\chi \in \hat{G} \mid \forall h \in H, \chi(h) = 1\}$$

appelé l'*orthogonale* de H . C'est donc le sous-groupe de $\hat{G}$ formé des caractères triviaux sur H .

Lemme 4. Il existe un isomorphisme

$$H^\# \cong \widehat{G/H}.$$

Démonstration. On pose

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \widehat{G/H} & \rightarrow & H^\# \\ \chi & \mapsto & \tilde{\chi} \end{array}$$

où $\tilde{\chi}(g) = \chi(gH)$ pour tout $g \in G$. En particulier on voit que φ est bien défini puisque si $h \in H$, $\tilde{\chi}(h) = \chi(H) = 1$. D'autre part on vérifie facilement que φ est morphisme de groupes.

Si $\gamma \in H^\#$, alors on définit $\chi \in \widehat{G/H}$ par $\chi(gH) = \gamma(g)$. L'application χ est bien définie puisque si $gH = g'H$, $gg'^{-1} \in H$, et donc $\gamma(g) = \gamma(g')$. D'autre part puisque γ est un morphisme de groupe de G dans $\mathbb{C}^*$, χ est un morphisme de groupe de G/H dans $\mathbb{C}^*$. Enfin, $\tilde{\chi} = \gamma$, d'où la surjectivité de φ .

Si $\tilde{\chi} = \chi'$, alors de manière évidente $\chi = \chi'$, et donc φ est injective, d'où la conclusion. $\square$

Théorème 5 (Formule de Poisson). *On a la formule, pour $g \in G$,*

$$\sum_{h \in H} f(gh) = \frac{|H|}{|G|} \sum_{\chi \in H^\#} \hat{f}(\bar{\chi}) \chi(g).$$

En particulier, si $g = 1$,

$$\sum_{h \in H} f(h) = \frac{|H|}{|G|} \sum_{\chi \in H^\#} \hat{f}(\bar{\chi}).$$

Démonstration. On note S un système de représentants des classes d'équivalences de G/H . On définit $\tilde{f} \in \mathbb{C}[G/H]$ par

$$\tilde{f}(gH) = \sum_{h \in H} f(gh).$$

On remarque que $h \mapsto gh \in \mathfrak{S}(gH)$, et donc si $gH = g'H$, alors $\sum_{h \in H} f(gh) = \sum_{h \in H} f(g'h)$ et donc $\tilde{f}$ est bien définie. On peut alors lui appliquer la formule d'inversion de Fourier et obtenir, pour $gH \in G/H$

$$\tilde{f}(gH) = \sum_{\chi \in \widehat{G/H}} \langle \tilde{f}, \chi \rangle \chi(gH).$$

On explicite alors les coefficients de Fourier de $\tilde{f}$: pour $\chi \in \widehat{G/H}$, on a

$$c_{\tilde{f}} = \langle \tilde{f}, \chi \rangle = \frac{1}{|G/H|} \sum_{g \in S} \tilde{f}(gH) \overline{\chi(gH)} = \frac{|H|}{|G|} \sum_{g \in S} \sum_{h \in H} f(gh) \overline{\chi(gH)}.$$

On remarque alors que l'application

$$\begin{aligned} S \times H &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

est une bijection, pour des raisons de cardinalité puisqu'elle est injective. Ainsi, puisque pour $h \in H$, $\chi(gH) = \chi(ghH)$, on a

$$\langle \tilde{f}, \chi \rangle = \frac{|H|}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{\chi(gH)} = \frac{|H|}{|G|} \sum_{g \in G} f(g) \overline{\tilde{\chi}(g)} = \frac{|H|}{|G|} \hat{f}(\bar{\tilde{\chi}})$$

où $\tilde{\chi}$ a déjà été défini. Finalement,

$$\sum_{h \in H} f(gh) = \tilde{f}(gH) = \frac{|H|}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G/H}} \hat{f}(\tilde{\chi}) \tilde{\chi}(g) = \frac{|H|}{|G|} \sum_{\chi \in H^\sharp} \hat{f}(\bar{\chi}) \chi(g)$$

d'après le lemme précédent. C'est la formule recherchée. $\square$

Remarque. La formule de Poisson discrète trouve notamment son intérêt en théorie des codes correcteurs, puisqu'elle permet de montrer l'identité de MacWilliams qui met en relation les poids des mots d'un code de Hamming et ceux des mots de son orthogonal.