

Extrema liés (par les sous-variétés)

Références : F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, Cassini, 2014,
J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, PUG, 1996,
V. Beck, J. Malick, G. Peyré, *Objectif Agrégation*, H & K, 2005. □

Leçons concernées : 159, 214, 215, 219.

Théorème 1. Soit $f, g_1, \dots, g_r$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. On note X l'ensemble de $x \in U$ tels que $g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0$. Si $f|_X$ admet un extremum local en a et les formes linéaires $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ sont indépendantes, alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_r dg_r(a),$$

autrement dit, les formes linéaires $df(a), dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ sont liées.

Lemme 2. Soit $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une submersion en $a \in U$ (une application différentiable sur U dont la différentielle en a $dg(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est surjective). Alors il existe $V \subset U$ un ouvert contenant a tel que l'application

$$h : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (g_1(x), \dots, g_p(x), x_{p+1}, \dots, x_n). \end{array}$$

définisse un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme sur son image W .

Démonstration. Quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que la matrice

$$B := \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq p}$$

est inversible. La matrice jacobienne en a de h est alors la matrice par blocs

$$\begin{pmatrix} B & (*) \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$$

qui est inversible. Ainsi, d'après le théorème d'inversion locale, il existe $V \subset U$ contenant a tel que $h|_V$ soit un difféomorphisme sur son image $W \subset \mathbb{R}^n$. □

Démonstration (Théorème). Par hypothèse sur les g_i , X est lisse au point a (vérifie les hypothèses d'une sous-variété au point a). On définit $T_a X$ l'espace tangent de X en a comme :

$$T_a X := \left\{ v \in \mathbb{R}^n, \exists \varepsilon > 0, \exists \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow X, \text{ de classe } \mathcal{C}^1, \gamma(0) = a \text{ et } \gamma'(0) = v \right\}.$$

1. Merci à Adrian Petr pour son aide.

Étape 1 : l'application $df(a)$ est nulle sur l'espace tangent : soit $v \in T_a X$ associé à γ . La fonction de classe $\mathcal{C}^1$ $f \circ \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow X$ admet un extremum local en 0 par hypothèse, donc $f \circ \gamma'(0) = 0$, or,

$$f \circ \gamma'(0) = df(a) \cdot \gamma'(0) = df(a) \cdot v = 0.$$

Étape 2 : on montre que $T_a X = \bigcap_{i=1}^r \ker(dg_i(a))$. On procède par double inclusion. Soit $1 \leq i \leq r$, alors par définition, $\forall x \in X$, $g_i(x) = 0$, donc en particulier, si $v \in T_a X$ associé à γ , pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $g_i \circ \gamma(t) = 0$ et donc

$$g_i \circ \gamma'(0) = 0 = dg_i(a) \cdot \gamma'(0) = dg_i(a) \cdot v = 0.$$

Réciproquement, on sait par hypothèse que $g = (g_1, \dots, g_p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une submersion, on considère alors $h : V \rightarrow W$ le $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme donné par le lemme précédent : $h(x_1, \dots, x_n) = (g_1(x), \dots, g_p(x), x_{p+1}, \dots, x_n)$. Soit $v \in \bigcap_{i=1}^r \ker(dg_i(a))$. On pose, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{\gamma}(t) = h(a) + t \, dh(a) \cdot v.$$

Il est clair que $\tilde{\gamma}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. D'autre part, $\tilde{\gamma}(0) = h(a) \in W$, ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $|t| < \varepsilon$, $\tilde{\gamma}(t) \in W$. Enfin, on remarque que

$$h(X \cap V) = W \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}).$$

Or, puisque $v \in \bigcap_{i=1}^r \ker(dg_i(a))$,

$$dh(a) \cdot v = (dg_1(a), \dots, dg_p(a), \text{id}, \dots, \text{id}) \cdot v \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}.$$

Ainsi, puisque $h(a) \in \{0\} \times \mathbb{R}^{n-p}$, pour tout $|t| < \varepsilon$, $\tilde{\gamma}(t) \in W \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-p})$. On considère alors $\gamma = h^{-1} \circ \tilde{\gamma} :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow X$, de classe $\mathcal{C}^1$, qui vérifie

$$\gamma'(0) = dh^{-1}(h(a)) \cdot \tilde{\gamma}'(0) = (dh(a))^{-1} \cdot dh(a) \cdot v = v$$

et donc $v \in T_a X$ [Faire un dessin].

Étape 3 : on conclut. On a montré que

$$T_a X = \bigcap_{i=1}^r \ker dg_i(a) \subset \ker df(a),$$

c'est-à-dire que

$$\{dg_1(a), \dots, dg_p(a)\}^0 \subset \{df(a)\}^0$$

et donc,

$$\text{Vect}(df(a)) \subset \text{Vect}(dg_1(a), \dots, dg_p(a))$$

par passage à l'orthogonal, c'est la conclusion recherchée. $\square$

On peut montrer le théorème spectral grâce au théorème des extrema liés (cf BECK, MALICK, PEYRÉ).

Application 3. Soit E un espace euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique. Alors il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u .

Démonstration. On considère

$$f : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle u(x), x \rangle \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle x, x \rangle - 1. \end{array}$$

Alors $S = \{x, g(x) = 0\}$ la sphère unité est compacte et donc f continue atteint son maximum sur S en e_1 . D'autre part $df(x)(h) = 2 \langle u(x), h \rangle$ et $dg(x)(h) = 2 \langle x, h \rangle$ donc d'après le théorème des extrema liés, il existe λ_1 tel que $df(e_1) = \lambda_1 dg(e_1)$, c'est-à-dire $u(e_1) = \lambda_1 e_1$. On a donc trouvé une valeur propre λ_1 de vecteur propre e_1 de norme 1.

On raisonne alors par récurrence sur $F = e_1^\perp$ □