

Étude de la loi Gamma

Référence : Développement de Théo Pierron.

Leçons concernées : 236, 239, 245, 260, 261, 263.

Définition 1. La loi Gamma $\Gamma(a, \lambda)$ de paramètres $a > 0, \lambda > 0$ est la loi de probabilité de densité

$$\gamma_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} e^{-\lambda x} x^{a-1} \mathbb{1}_{x \geq 0}.$$

Proposition 2. La fonction caractéristique φ de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it} \right)^a.$$

Démonstration. Étape 1 : on pose $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < \lambda\}$, et pour $z \in D$, on considère

$$\psi(z) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_{a,\lambda}(x) e^{xz} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-z)x} x^{a-1} dx$$

qui est bien définie puisque si $z \in D$, $x \geq 0$,

$$|e^{-(\lambda-z)x} x^{a-1}| \leq e^{-(\lambda-\Re(z))x} x^{a-1}$$

et $x \mapsto e^{-(\lambda-\Re(z))x} x^{a-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)$ puisque $\lambda - \Re(z) > 0$. On remarque que pour $t \in \mathbb{R}$, $\psi(it) = \varphi(t)$, on cherche donc à calculer ψ .

Étape 2 : on montre d'abord que ψ est holomorphe sur D en appliquant le théorème d'holomorphie sous l'intégrale sur tous les ouverts $D_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < \alpha < \lambda\}$:

- (i) $\forall z \in D_\alpha$, $x \mapsto e^{-(\lambda-z)x} x^{a-1}$ est mesurable,
- (ii) $\forall x \geq 0$, $z \mapsto e^{-(\lambda-z)x} x^{a-1}$ est holomorphe sur D_α ,
- (iii) $\forall z \in D_\alpha$, $\forall x \geq 0$,

$$|e^{-(\lambda-z)x} x^{a-1}| \leq e^{-(\lambda-\Re(z))x} x^{a-1} \leq e^{-(\lambda-\alpha)x} x^{a-1}$$

et $x \mapsto e^{-(\lambda-\alpha)x} x^{a-1} \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Étape 3 : on utilise ensuite le théorème du prolongement analytique : on calcule ψ sur $D \cap \mathbb{R}$. Soit $t < \lambda$, on a, en opérant le changement de variables $y = (\lambda - t)x$,

$$\psi(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-t)x} x^{a-1} dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-y} \frac{y^{a-1}}{(\lambda-t)^a} dy = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a)}{(\lambda-t)^a} = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t} \right)^a.$$

Ainsi, ψ et la fonction $z \mapsto \left(\frac{\lambda}{\lambda-z} \right)^a$ holomorphe sur D (en utilisant la détermination principale du logarithme) coïncident sur $D \cap \mathbb{R}$ et sont donc égales, d'où le résultat. $\square$

Corollaire 3. La transformée de Laplace de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ est bien définie sur $] -\infty, \lambda[$ et est donnée par

$$L(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t} \right)^a.$$

Démonstration. Cela a été démontré lors de la preuve de la proposition précédente. $\square$

Corollaire 4. La loi $\Gamma(a, \lambda)$ admet des moments à tout ordre donnés par :

$$m_n = \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{\lambda^n}.$$

Démonstration. Puisque la fonction caractéristique est analytique, le théorème qui relie fonction caractéristique et moments nous donne l'existence des moments à tout ordre de la loi $\Gamma(a, \lambda)$ ainsi que leur expression. Or, puisque $\varphi(t) = \lambda^a(\lambda - it)^{-a}$, on obtient par récurrence

$$\varphi^{(n)}(t) = a(a+1) \cdots (a+n-1) \lambda^a i^n (\lambda - it)^{-a-n}$$

et on conclut avec

$$\varphi^{(n)}(0) = i^n m_n = i^n \frac{a(a+1) \cdots (a+n-1)}{\lambda^n}.$$

$\square$

Remarque. On aurait pu raisonner de même avec la transformée de Laplace. Puisque celle-ci est définie au voisinage de 0, elle est analytique, et donc la loi $\Gamma(a, \lambda)$ admet des moments à tout ordre donnés par $m_n = L^{(n)}(0)$ et leur calcul est alors identique.

Remarque. Le calcul des moments peut s'effectuer directement : par le changement de variables $y = \lambda x$ on obtient

$$\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^a dx = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a) \lambda^{a+1}} \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{a-1} dy = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a) \lambda} = \frac{a}{\lambda}.$$

et l'on procède de la même manière pour les moments d'ordres supérieurs.