

Équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}$

Référence : J. Rauch, *Partial differential equations*, Springer, 1991. 1

Leçons concernées : 201, 222, 239, 250.

Théorème 1. Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Alors il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant

- (i) $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$
- (ii) $u(x, 0) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- (iii) $x \mapsto u(x, t)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ uniformément par rapport à t , c'est-à-dire que pour tout $T > 0$,

$$\forall k, l \geq 0, \quad M_{k,l}^T := \sup_{|t| < T} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x, t) \right| < +\infty.$$

De plus la solution est donnée par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi} d\xi.$$

Démonstration. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : on suppose que $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ est solution du problème. Puisque $u(., t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ on peut considérer la transformée de Fourier partielle de u :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \hat{u}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} u(x, t) e^{-ix\xi} dx.$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}$, on applique alors le théorème de dérivation sous l'intégrale à $t \mapsto \hat{u}(\xi, t)$ sur tout intervalle $] -T, T[$, pour $T > 0$:

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}, t \mapsto u(x, t) e^{-ix\xi}$ est dérivable sur $] -T, T[$
- (ii) $\forall t \in] -T, T[, x \mapsto u(x, t) e^{-ix\xi} \in L^1(\mathbb{R})$ puisque $u(., t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in] -T, T[,$

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \left(u(x, t) e^{-ix\xi} \right) \right| = \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right| = \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{M_{0,2}^T + M_{2,2}^T}{1 + |x|^2}$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}$ et ne dépend pas de t .

On obtient ainsi, pour $\xi, t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t} \left(u(x, t) e^{-ix\xi} \right) dx = i \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) e^{-ix\xi} dx.$$

1. Merci à Michel Nassif pour l'idée et l'aide sur certains points du développement.

En réalisant deux intégrations par parties on obtient alors pour $\xi, t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -i\xi^2 \hat{u}(\xi, t)$$

et ainsi, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, il existe $A(\xi) \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi)e^{-i\xi^2 t}.$$

Or, pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{u}(\xi, 0) = A(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x, 0)e^{-ix\xi} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-ix\xi} dx = \hat{f}(\xi).$$

On obtient alors $\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t}$. Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on peut appliquer l'inversion de Fourier pour avoir, pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi} d\xi.$$

On a donc unicité de la solution.

Synthèse : on considère

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi} d\xi$$

pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. En appliquant le théorème de dérivation sous l'intégrale on obtient la régularité de u , qui est en fait $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ et le fait qu'elle vérifie l'équation de Schrödinger sur $\mathbb{R}^2$.

D'autre part, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi} d\xi = f(x)$$

par inversion de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Enfin, pour montrer le point (iii), on observe que pour tout $l \geq 0$, par dérivation sous le signe intégral,

$$\frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} i^l \xi^l \hat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t} e^{ix\xi} d\xi$$

ainsi pour $k \geq 0$,

$$x^k \frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} i^l \xi^l \hat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t} x^k e^{ix\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} (i^l \xi^l \hat{f}(\xi)e^{-i\xi^2 t}) i^k e^{ix\xi} d\xi$$

et donc pour $k, l \geq 0$, et pour $|t| < T$, où $T > 0$,

$$\begin{aligned}
\left| x^k \frac{\partial^l u}{\partial x^l}(x, t) \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} \left(\xi^l \widehat{f}(\xi) e^{-i\xi^2 t} \right) \right| d\xi \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k'=0}^k \binom{k}{k'} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{k'}}{\partial \xi^{k'}} \left(\xi^l \widehat{f}(\xi) \right) \right| \left| \frac{\partial^{k-k'}}{\partial \xi^{k-k'}} \left(e^{-i\xi^2 t} \right) \right| d\xi \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k'=0}^k \binom{k}{k'} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{k'}}{\partial \xi^{k'}} \left(\xi^l \widehat{f}(\xi) \right) \right| P_{k'}(|\xi|, |t|) d\xi \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k'=0}^k \binom{k}{k'} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial^{k'}}{\partial \xi^{k'}} \left(\xi^l \widehat{f}(\xi) \right) \right| P_{k'}(|\xi|, T) d\xi < +\infty
\end{aligned}$$

où $P_{k'}$ est un polynôme à coefficients positifs en deux variables. Pour obtenir cette série de majoration on a appliqué l'inégalité triangulaire et la formule de Leibniz. La majoration est alors indépendante de t , et elle est valable puisque f étant dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il en est de même de $\widehat{f}$, et donc puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par dérivation et multiplication par un polynôme,

$$\xi \mapsto \frac{\partial^{k'}}{\partial \xi^{k'}} \left(\xi^l \widehat{f}(\xi) \right) P_{k'}(\xi, T) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R}).$$

□