

Équation de la chaleur sur le cercle

Références : H. Dym, H.P. McKean, *Fourier series and integrals*, Academic Press, 1972. [\[1\]](#)

Leçons concernées : 202, 209, 222, 235, 241, 246.

Théorème 1. *Il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^\infty(]0, +\infty[\times \mathbb{T})$ à l'équation*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{sur }]0, +\infty[\times \mathbb{T} \quad (1)$$

avec pour condition initiale

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \|u - f\|_\infty = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \sup_{x \in \mathbb{T}} |u(t, x) - f(x)| = 0 \quad (2)$$

où $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$.

Démonstration. On raisonne par analyse synthèse.

Analyse : supposons que $u \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[\times \mathbb{T})$ est solution de [\(1\)](#) et [\(2\)](#). Alors pour tout $t > 0$, $x \mapsto u(t, x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{T}$ et donc on peut écrire, avec convergence normale de la série en x ,

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{T}, \quad u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e_n(x)$$

où $e_n : x \mapsto e^{inx}$ et où

$$\forall t > 0, \forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x) e^{-inx} dx.$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on cherche alors à déterminer c_n . On applique le théorème de dérivation sous l'intégral sur tout compact de $]0, +\infty[$ puisque $[0, 2\pi]$ est un compact et que $\frac{\partial u}{\partial t}$ est continue sur $]0, +\infty[\times \mathbb{T}$. On obtient alors $c_n \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[)$ et $\forall t > 0$,

$$\begin{aligned} c'_n(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) e^{-inx} \right]_0^{2\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) e^{-inx} dx \\ &= 0 + \frac{in}{2\pi} [u(t, x) e^{-inx}]_0^{2\pi} - \frac{n^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t, x) e^{-inx} dx \\ &= 0 - n^2 c_n(t). \end{aligned}$$

1. Merci à Michel Nassif pour l'idée et certains éléments du développement.

Par deux intégrations par parties, en utilisant la périodicité. On résout alors l'équation différentielle vérifiée par c_n et on trouve $c_n(t) = c_n^0 e^{-n^2 t}$ pour tout $t > 0$. Il nous faut alors déterminer c_n^0 . On sait que $c_n^0 = \lim_{t \rightarrow 0} c_n(t)$. D'autre part, grâce à (2),

$$\left| c_n(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{T}} |u(t, x) - f(x)| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi,

$$c_n^0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

On obtient finalement, $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{T}$,

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny} dy \right) e^{-n^2 t} e^{inx}$$

on peut alors intervertir somme et intégral puisque $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{T}$,

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |f(y) e^{-n^2 t}| dy < +\infty$$

et on a ainsi $\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{T}$,

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{in(x-y)} e^{-n^2 t} \right) f(y) dy = (K_t * f)(x)$$

où $K_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx} e^{-n^2 t}$. On a donc trouvé un candidat pour la solution.

Synthèse : l'analyse nous a montré qu'il n'y avait qu'une possibilité de solution, ce qui assure l'unicité. On montre alors que $u(t, x) = (K_t * f)(x)$ est solution de (1) et (2). On écrit $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n(t, x)$ où $u_n(t, x) = c_n^0 e^{-n^2 t} e^{inx}$ avec $c_n^0 = \int_0^{2\pi} f(y) e^{-iny} dy$ (on a l'égalité par une interversion limite intégrale qu'on a déjà justifié). On remarque alors que u_n est une fonction de classe C^∞ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{T}$ et qui vérifie (1). D'autre part, on a la majoration, pour $k, l \geq 0, t \geq a > 0$ et $x \in \mathbb{T}$,

$$\left| \frac{\partial^{k+l} u_n}{\partial t^k \partial x^l}(t, x) \right| \leq |c_n^0| n^{2k+l} e^{-n^2 a} \leq \|f\|_\infty n^{2k+l} e^{-n^2 a}$$

qui est le terme général d'une série convergente. On peut donc appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme pour obtenir que $u \in C^\infty(]0, +\infty[\times \mathbb{T})$ et qu'elle vérifie (1).

On montre enfin que u vérifie (2). Puisque alors $f \in C^1(\mathbb{T})$, on a, pour $x \in \mathbb{T}$

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n(x)$$

et d'autre part,

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{T}, \quad u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{-n^2 t} e_n(x)$$

et donc

$$\forall t > 0, \quad \sup_{x \in \mathbb{T}} |u(t, x) - f(x)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 - e^{-n^2 t}) |c_n(f)|.$$

Or on sait que, puisque $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$,

$$c_n(f) = -\frac{1}{n^2} c_n(f'')$$

et ainsi

$$\forall t > 0, \quad \sup_{x \in \mathbb{T}} |u(t, x) - f(x)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 - e^{-n^2 t}) \frac{1}{n^2} |c_n(f'')| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 - e^{-n^2 t}) \frac{1}{n^2} \|f''\|_\infty$$

et on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée pour conclure. $\square$

Remarque. On peut en fait montrer le même théorème avec $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. L'analyse se fait de la même manière puisque l'on a seulement utilisé la continuité de f , et de même, la vérification que u vérifie [\(1\)](#) est identique. On montre enfin que u vérifie [\(2\)](#). On utilise pour cela le cas $\mathcal{C}^2(\mathbb{T})$ et on commence par montrer que K_t est positif pour tout $t > 0$. En effet, soit $t > 0$, la série

$$g_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(x-2\pi n)^2/4t}$$

converge normalement sur $\mathbb{T}$ puisqu'on a la majoration

$$e^{-(x-2\pi n)^2/4t} \leq e^{-2\pi(n-1)^2/4t}.$$

Ainsi $g_t \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ et on calcule ses coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned} \hat{g}_t(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(x-2\pi n)^2/4t} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{-(x-2\pi n)^2/4t} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-2\pi n}^{-2\pi(n-1)} e^{-y^2/4t} e^{-iky} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4t} e^{-iky} dy = \sqrt{\frac{t}{2\pi}} e^{-tk^2} \end{aligned}$$

par convergence normale de la série, par changement de variable $y = x - 2\pi n$ et par calcul de la transformée de Fourier d'une gaussienne. On a alors convergence absolue des coefficients de Fourier de g_t , et donc par un corollaire du théorème de Fejér, g_t est égale à sa série de Fourier, et on a donc,

$$\sqrt{\frac{2\pi}{t}} g_t(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{t}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(x-2\pi n)^2/4t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-tn^2} e^{inx} = K_t(x).$$

On a d'autre part, par convergence normale de la série en $x \in \mathbb{T}$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_t(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-n^2 t} \int_0^{2\pi} e^{inx} dx = 1$$

pour tout $t > 0$. Soit $\varepsilon > 0$, on prend alors $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$ telle que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. On a, par inégalité triangulaire, linéarité de la convolution, inégalité de convolution, et par le cas $\mathcal{C}^2(\mathbb{T})$,

$$\begin{aligned} \|K_t * f - f\|_\infty &\leq \|K_t * f - K_t * g\|_\infty + \|K_t * g - g\|_\infty + \|g - f\|_\infty \\ &= \|K_t * (f - g)\|_\infty + \|K_t * g - g\|_\infty + \|g - f\|_\infty \\ &\leq \|K_t\|_1 \|f - g\|_\infty + \|K_t * g - g\|_\infty + \|g - f\|_\infty \\ &= 2\|f - g\|_\infty + \|K_t * g - g\|_\infty \\ &\leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

pour t suffisamment petit, d'où la conclusion.