Densité des polynômes orthogonaux

Références : V. Beck, J. Malick, G. Peyré, *Objectif Agrégation*, H & K, 2005, S.D. Chatterji, *Cours d'analyse 3 : équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1995.

Leçons concernées : 201, 202, 207, 209, 213, 234, 239, 245, 250.

Définition 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère ρ une fonction poids sur I, c'est-à-dire une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_I |x|^n \rho(x)\, dx < +\infty.$$

On note alors

$$L^2(I,\rho) = \left\{ f : I \to \mathbb{R} \mid \int_I |f(x)|^2 \rho(x)\, dx < +\infty \right\}$$

que l'on munit du produit scalaire

$$< f, g >= \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)\, dx$$

qui en fait un espace de Hilbert. On note alors $(P_n)_n$ l'unique suite de polynôme orthogonaux pour ce produit scalaire, échelonnée en degré.

Théorème 2. *On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que*

$$\int_I e^{a|x|} \rho(x)\, dx < +\infty.$$

Alors $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$.

Démonstration. On cherche à montrer que la suite $(P_n)_n$ est totale dans $L^2(I,\rho)$. On utilise pour cela le critère de densité valable dans les espaces de Hilbert, et on montre que $\big(\mathrm{Vect}(P_n, n \in N)\big)^\perp = \big(\mathrm{Vect}(x \mapsto x^n, n \in N)\big)^\perp = \{0\}$. On considère donc $f \in \big(\mathrm{Vect}(x \mapsto x^n, n \in N)\big)^\perp$.

Étape 1 : prolongement de la transformée de Fourier d'une fonction. On pose

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On remarque que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ puisque pour $x \in I$, $|f(x)|\rho(x) \leqslant \frac{1}{2}(1 + |f(x)|^2)\rho(x) \in L^1(I)$, ce qui nous permet de considérer

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int_I f(x) e^{-i\xi x} \rho(x)\, dx$$

la transformée de Fourier de φ. On pose alors, pour $z \in B_a = \{z \in \mathbb{C} \mid |\Im(z)| < a/2\}$,

$$F(z) = \int_I e^{-izx} f(x)\rho(x)\,dx$$

qui est bien défini puisque pour $z \in B_a$,

$$\begin{aligned}\int_I |e^{-izx}||f(x)|\rho(x)\,dx &\leqslant \int_I e^{|x|a/2}|f(x)|\rho(x)\,dx \\ &\leqslant \left(\int_I e^{|x|a}\rho(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)\,dx\right)^{1/2} < +\infty\end{aligned}$$

par inégalité de Cauchy-Schwarz.

Étape 2 : F est holomorphe sur B_a. On applique le théorème d'holomorphie sous l'intégrale à la fonction $F(z) = \int_I g(x,z)\,dx$ où $g(x,z) = e^{-izx}f(x)\rho(x)$ pour $x \in I$ et $z \in B_a$. On a,

(i) pour tout $z \in B_a$, $x \mapsto g(x,z)$ est mesurable sur I,

(ii) pour tout $x \in I$, $z \mapsto g(x,z)$ est holomorphe sur l'ouvert B_a,

(iii) pour tout $x \in I$ et $z \in B_a$,

$$|g(x,z)| \leqslant h(x) = e^{|x|a/2}|f(x)|\rho(x)$$

et $h \in L^1(I)$.

Ainsi, F est holomorphe sur B_a.

Étape 3 : calcul des dérivées de F en 0. D'après le théorème d'holomorphie sous l'intégrale, pour $n \in \mathbb{N}$, et pour $z \in B_a$,

$$F^{(n)}(z) = \int_I (-i)^n x^n e^{-izx} f(x)\rho(x)\,dx$$

et donc $F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)\rho(x)\,dx = (-i)^n < f, x \mapsto x^n >= 0$ par hypothèse sur f. Ainsi par unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe, F est nulle sur un voisinage de 0. Par le principe des zéros isolés, puisque B_a est connexe, F est nulle sur B_a, et donc, puisque $F = \widehat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$, $\widehat{\varphi}$ est nulle. Par injectivité de la transformée de Fourier sur L^1, φ est alors nulle sur $\mathbb{R}$, et donc finalement f est nulle sur I. $\square$

Remarque. Il existe des fonctions poids dont les polynômes orthogonaux associés ne forment pas une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$, par exemple, pour la fonction poids $\rho(x) = x^{-\log(x)}$ sur $I =]0,+\infty[$, la fonction $f(x) = \sin(2\pi\log(x))$ est orthogonale à tout les polynômes, voir la référence pour plus de détails.

Exemple. On considère la fonction poids sur $I = \mathbb{R}$, $\rho(x) = e^{-x^2}$. Les polynômes orthogonaux associés sont appelés polynômes de Hermite. Les premiers polynômes de Hermite sont les suivants :

$$P_0 = 1, \quad P_1 = X, \quad P_2 = X^2 - \frac{1}{2}, \quad P_3 = X^3 - \frac{3}{2}X \text{ et } \quad P_4 = X^4 - 3X^2 + \frac{3}{4}.$$

On dispose d'une formule explicite[1] pour ces polynômes, en les imposant unitaires :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\Big(e^{-x^2}\Big).$$

Démonstration. On commence par montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est un polynôme unitaire de degré n. En effet le résultat est évident pour $n = 0$, et si il est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} e^{x^2} \frac{d}{dx}\Big(\frac{d^n}{dx^n}\Big(e^{-x^2}\Big)\Big) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} e^{x^2} \frac{d}{dx}\Big(\frac{2^n}{(-1)^n} e^{-x^2} P_n(x)\Big) \\ &= -\frac{1}{2} e^{x^2}\Big(- 2xe^{-x^2} P_n(x) + e^{-x^2} \frac{d}{dx}\big(P_n(x)\big)\Big) = xP_n(x) - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\big(P_n(x)\big) \end{aligned}$$

et on obtient le résultat par hypothèse de récurrence. On montre alors que pour $m, n \in \mathbb{N}$, $< P_m, P_n >= \frac{\sqrt{\pi}\, n!}{2^n} \delta_n^m$. On écrit, en supposant que $m \leqslant n$,

$$\begin{aligned} < P_m, P_n > &= \int_{\mathbb{R}} P_m(x) P_n(x) e^{-x^2}\, dx = \frac{(-1)^n}{2^n} \int_{\mathbb{R}} P_m(x) \frac{d^n}{dx^n}\Big(e^{-x^2}\Big)\, dx \\ &= \frac{(-1)^{n+m}}{2^n} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^m}{dx^m}\Big(P_m(x)\Big) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}\Big(e^{-x^2}\Big)\, dx \end{aligned}$$

grâce à m intégrations par parties. Maintenant, si $m = n$, on obtient le résultat puisque P_n est unitaire de degré m et que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. D'autre part, si $m < n$, une autre intégration par partie nous donne $< P_m, P_n >= 0$ puisque P_m est un polynôme de degré m. □

On remarque que la fonction poids ρ vérifie les hypothèse du théorème précédent pour tout $a > 0$, et donc les polynômes de Hermite forment une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}, \rho)$. Or les applications

$$\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}, \rho) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & f\sqrt{\rho} \\ g/\sqrt{\rho} & \leftarrow\!\shortmid & g \end{array}$$

sont des isométries bijectives réciproques l'une de l'autre. Ainsi $(P_n e^{-x^2/2})_n$ est, à renormalisation près, une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ qui s'écrit explicitement

$$\frac{(-1)^n}{2^n} e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}\Big(e^{-x^2}\Big).$$

1. On a une formule plus explicite que cela pour ces polynômes, mais elle demande plus de travail, voir la référence.