leçons 202 : Ex parties denses
228 : c^té et dérivabilité des f^{co} réelles d'une var réelle
205 : Espaces complets

Densité des fonctions continues nulle part dérivables dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

9

Références :
- Gourdon Analyse

Théorème : L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie.

preuve : On pose $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$, on pose

$$\Omega_{n,\varepsilon} = \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \ \mathcal{C}^0 \ \middle| \ \forall y \in [0,1]\ \exists x \in]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\cap [0,1] \ \ |f(x)-f(y)| > n|x-y| \right\}$$

① MQ $\Omega_{n,\varepsilon}$ est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$

On note $F_{n,\varepsilon} = E \setminus \Omega_{n,\varepsilon}$

Soit $(f_p) \subset F_{n,\varepsilon}$ qui converge vers $f \in E$. MQ $f \in F_{n,\varepsilon}$.

$\forall p \in \mathbb{N} \ \exists y_p \in [0,1] \ \forall x \in]y_p-\varepsilon, y_p+\varepsilon[\cap [0,1] \ |f_p(x) - f_p(y_p)| \leqslant n|x-y_p|$

$[0,1]$ est compact donc il existe une extraction φ telle que $(y_{\varphi(p)})$ converge vers $y \in [0,1]$. Soit $x \in]y-\varepsilon, y+\varepsilon[\cap [0,1]$

$y_{\varphi(p)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} y$ donc $\exists N \in \mathbb{N} \ \forall p \geqslant N \quad x \in]y_{\varphi(p)}-\varepsilon, y_{\varphi(p)}+\varepsilon[\cap [0,1]$

$\forall p \geqslant N \qquad |f_{\varphi(p)}(x) - f_{\varphi(p)}(y_{\varphi(p)})| \leqslant n|x - y_{\varphi(p)}|$

$p \to +\infty$, $\quad |f(x) - f(y)| \leqslant n|x-y|$

Donc $f \in F_{n,\varepsilon}$.

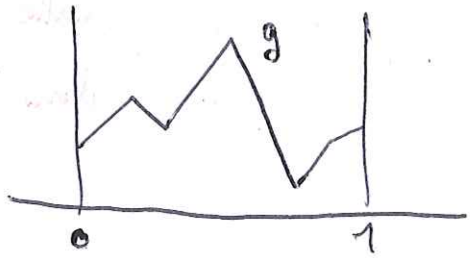
② MQ $\Omega_{n,\varepsilon}$ est dense dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$

$[0,1]$ est compact donc par Heine tout élément de E est uniformément continue. Ainsi, l'ensemble des fonctions affines par morceaux est dense dans E.

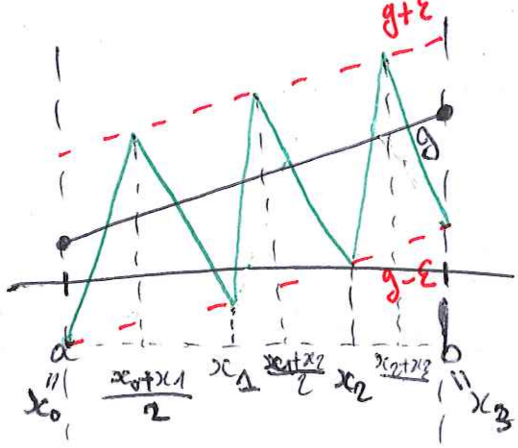
Il suffit de mq $\Omega_{n,\varepsilon}$ est dense dans l'ensemble des fonctions affines par mcx sur $[0,1]$.

Soit g affine par morceaux

Soit $\varepsilon>0$



- On se restreint au cas où g est affine en construisant $f\in\Omega_{n,\varepsilon}$ de la manière suivante



$(N=3)$

Si la pente de g est inférieure ou égale à n

explication : on divise a,b en N intervalles de longueurs égales et on construit une fonction en dent de scier f

Si N est assez grand, $f\in\Omega_{n,\varepsilon}$.

Si la pente de g est strictement supérieure à n, on pose $f=g$.

- Pour le cas $g\underline{al}$, on recolle les morceaux. La construction donne une fonction continue, $f\in\Omega_{n,\varepsilon}$

③ Application du thm de Baire

$\Omega=\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\Omega_{n,\frac{1}{n}}$ est dense dans $(E,\|\cdot\|_\infty)$ car $(E,\|\cdot\|_\infty)$ est complet.

④ Soit $f\in\Omega$

$\forall n\in\mathbb{N}^*\ \forall y\in[0,1]\ \exists x_n\in\left]y-\frac{1}{n},y+\frac{1}{n}\right[\cap[0,1]\ |f(x_n)-f(y)|>n|x_n-y|$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x_n\neq y$ et $\left|\frac{f(x_n)-f(y)}{x_n-y}\right|>n$

donc $\left|\frac{f(x_n)-f(y)}{x_n-y}\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ or $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}y$ donc f pas dérivable en y.

Ceci est vrai pour tout $y\in[0,1]$, d'où le résultat.