# Théorème de Cauchy-Lipschitz local

Référence : Demailly, Analyse numérique et équations différentielles p.153

> *Théorème :*
> Si $f : \mathscr{U} \to \mathbb{R}^n$ est localement lipschitizienne en la seconde variable, alors pour tout cylindre de sécurité $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(x_0, r)$ le problème de Cauchy avec condition initiale $(t_0, x_0)$ admet une unique solution $y : [t_0 - T, t_0 + T] \to \mathscr{U}$.

*Preuve (via le théorème du point fixe)* :

Soit $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(x_0, r)$ un cylindre de sécurité pour :

$$(E) : \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

avec $T \leq \dfrac{r}{M}$.[1] où $M = \sup_{\mathscr{C}} \|f(t,y)\| < +\infty$.

Notons $\mathscr{F} = \mathscr{C}^0([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}(x_0, r))$ l'ensemble des applications continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\overline{B}(x_0, r)$ muni de la distance $d$ de la convergence uniforme.
À toute fonction $y$ de $\mathscr{F}$, on associe $\phi(y)$ définie par :

$$\phi(y) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\,\mathrm{du}$$

On a alors le lemme suivant :
**Lemme :** $y$ est une solution de (E) ssi y est un point fixe de $\phi$

On va donc essayer d'utiliser le théorème du point fixe. On remarque que :

$$\|\phi(y)(t) - x_0\| = \|\int_{t_0}^{t} f(u, y(u))\,\mathrm{du}\| \leq M|t - t_0| \leq MT \leq r$$

Donc, $\phi(y) \in \mathscr{F}$. L'opérateur $\phi$ envoie $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{F}$ .
Soient maintenant $y$ et $z$ dans $\mathscr{F}$ et $y_{(p)} = \phi^p(y)$, $z_{(p)} = \phi^p(z)$.
On a :

$$\begin{aligned} \|y_{(1)}(t) - z_{(1)}(t)\| &= \|\int_{t_0}^{t} (f(u, y(u)) - f(u, z(u)))\,\mathrm{du}\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(u, y(u)) - f(u, z(u))\|\,\mathrm{du} \right| \\ &\quad \text{et comme f est supposée k-lipschitzienne [2].} \\ &\leq k \left| \int_{t_0}^{t} \|y(u) - z(u)\|\,\mathrm{du} \right| \\ &\leq k|t - t_0| d(y, z) \end{aligned}$$

De même :

1. Cette condition force le cylindre à être un cylindre de sécurité
2. On met des valeurs absolues autour de l'intégrale car on ne sait pas si $t_0$ est plus petit ou plus grand que t

$$
\begin{aligned}
\|y_{(2)}(t)-z_{(2)}(t)\| &\leq \left|\int_{t_0}^{t} k\|y_{(1)}(u)-z_{(1)}(u)\|\,\mathrm{du}\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} k.k|u-t_0|d(y,z)\,\mathrm{du}\right| \\
&\leq k^2\frac{|t-t_0|^2}{2}d(y,z)
\end{aligned}
$$

Par récurrence, on obtient :

$$\|y_{(p)}(t)-z_{(p)}(t)\| \leq k^p\frac{|t-t_0|^p}{p!}d(y,z)$$

En particulier, $d(\phi^p(y),\phi^p(z)) = d(y_{(p)},z_{(p)}) \leq k^p\frac{|t-t_0|^p}{p!}d(y,z) \leq \frac{(kT)^p}{p!}d(y,z)$. Donc $\phi^p$ est lipschitzienne de rapport $\frac{(kT)^p}{p!}$ sur $\mathscr{F}$. Comme $\lim_{p\to+\infty}\frac{(kT)^p}{p!} = 0$, alors il existe un p assez grand tel que $\frac{(kT)^p}{p!} < 1$. Pour une telle valeur de p, $\phi^p$ est contractante de $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{F}$. Par ailleurs, $\mathscr{F}$ est un espace métrique complet. Le théorème du point fixe implique que $\phi$ admet un unique point fixe [3], ce qui termine la preuve.

3. Le théorème du point fixe implique en réalité que $\phi^p$ admet un unique point fixe. Soit a ce point fixe, on a $\phi^p(a) = a \Rightarrow \phi^{p+1}(a) = \phi^p(\phi(a)) = \phi(\phi^p(a)) = \phi(a)$. Par unicité du point fixe, on a $\phi(a) = a$