Sou v. Picart, cours de calcul formel p.159 (exo mais corrigé).

Théorème de Bézout faible

Théorème : Soient k un corps infini, puis $P, Q \in k[X,Y]$. On note d le degré total de P et d' le degré total de Q. Alors l'ensemble $V(P) \cap V(Q)$ est de cardinal au plus dd'.

Démonstration :

* On note p le degré de P en Y. On écrit $P(X,Y) = \sum_{k=0}^{p} P_k(X) Y^{p-k}$,
  q le degré de Q en Y. $Q(X,Y) = \sum_{k=0}^{q} Q_k(X) Y^{q-k}$

avec $\deg P_k \leqslant d - p + k$, $\deg Q_k \leqslant d' - q + k$. On pose $R(X) = \mathrm{Res}_Y(P(X,Y), Q(X,Y))$.

On va montrer que le degré de R est majoré par dd'.

On a
$$R(X) = \begin{vmatrix} P_0(X) & \cdots & \cdots & P_p(X) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & P_0(X) & \cdots & \cdots & P_p(X) \\ Q_0(X) & \cdots & \cdots & Q_q(X) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & Q_q(X) & \cdots & \cdots & Q_q(X) \end{vmatrix} = \det((R_{ij}(X))_{i,j}),$$

où
$$R_{ij}(X) = \begin{cases} P_{j-i}(X) & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant q,\ 0 \leqslant j-i \leqslant p \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant q,\ (j < i \text{ ou } j > p+i) \\ Q_{j-i+q}(X) & \text{si } q+1 \leqslant i \leqslant p+q,\ 0 \leqslant j-i+q' \leqslant q' \\ 0 & \text{si } q+1 \leqslant i \leqslant p+q,\ (j < i-q' \text{ ou } j > i) \end{cases}$$

On a alors
$$\deg R_{ij}(X) \leqslant \begin{cases} d - p + j - i & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant q \\ d' - q + j - i + q = d' + j - i & \text{si } q+1 \leqslant i \leqslant p+q \end{cases}$$

De plus, $R(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{i=1}^{p+q} R_{i\sigma(i)}(X)}_{=: R_\sigma(X)}$. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}$.

On a
$$\begin{aligned} \deg R_\sigma = \sum_{i=1}^{p+q} \deg R_{i\sigma(i)} &\leqslant \sum_{i=1}^{q} (d - p + \sigma(i) - i) + \sum_{i=q+1}^{p+q} (d' + \sigma(i) - i) \\ &\leqslant q(d-p) + pd' + \cancel{\sum_{i=1}^{p+q} (\sigma(i) - i)} \\ &\leqslant q(d-p) + d'(p-d) + dd' \leqslant dd' \end{aligned}$$

ce qui donne $\deg R \leqslant dd'$. De même, le degré de $S(Y) = \mathrm{Res}_X(P(X,Y), Q(X,Y))$ est majoré par dd'.

Finalement, on a $|V(P) \cap V(Q)| \leqslant (dd')^2$. On va chercher à affiner cette majoration. On note $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ les éléments de $V(P) \cap V(Q)|$.
Si tous les α_i sont distincts, alors $n \leqslant dd'$, car les α_i sont racines de R, qui est de degré majoré par dd'.

On va se ramener à cela dans le cas général.

On commence par remarquer que les droites d'équation $y = \alpha_i + u\beta_i$ ont deux à deux au plus un point d'intersection. Comme k est infini, on fixe alors $u \in k$ tel que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, avec $i \neq j$, on ait $\alpha_i + u\beta_i \neq \alpha_j + u\beta_j$. On pose ensuite

$$\tilde{P}(X,Y) = P(X - uY, Y).$$
$$\tilde{Q}(X,Y) = Q(X - uY, Y)$$

Alors

$$\begin{aligned}
(\alpha, \beta) \in V(P) \cap V(Q) &\iff P(\alpha, \beta) = 0 \text{ et } Q(\alpha, \beta) = 0 \\
&\iff P((\alpha + u\beta) - u\beta, \beta) = 0 \text{ et } Q((\alpha + u\beta) - u\beta, \beta) = 0 \\
&\iff \tilde{P}(\alpha + u\beta, \beta) = 0 \text{ et } \tilde{Q}(\alpha + u\beta, \beta) = 0 \\
&\iff (\alpha + u\beta, \beta) \in V(\tilde{P}) \cap V(\tilde{Q})
\end{aligned}$$

En particulier, on a $|V(P) \cap V(Q)| = |V(\tilde{P}) \cap V(\tilde{Q})|$, ce qui permet de conclure.