Théorème de Féjer

Référence Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels, Mohammed El Amari

Théorème :
1) Soit f dans $\mathscr{C}_{2\pi}$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \|\sigma_N f - f\|_\infty = 0$
2) Soit f dans $L^1_{2\pi}$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \|\sigma_N f - f\|_1 = 0$

Preuve :

1) Soit $\delta \in]0,\pi]$, on pose $\omega(\delta) = \sup\{|f(u)-f(v)|; |u-v| \leq \delta\}$.
On prend $(K_N)_N$ le noyau de Féjer, on a $K_N = \sum\limits_{n=0}^{N} D_n$ où D_n est le noyau de Dirichlet.
On sait de plus que : $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,\mathrm{dt} = 1$ et $K_N(x) = \frac{1}{N}\Big(\frac{\sin(\frac{Nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}\Big)^2$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
|\sigma_N f(x) - f(x)| &= |f * K_N(x) - f(x)| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))K_N(t)\,\mathrm{dt}\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq\delta}|f(x-t)-f(x)|K_N(t)\,\mathrm{dt} + \frac{1}{2\pi}\int_{|t|>\delta}|f(x-t)-f(x)|K_N(t)\,\mathrm{dt} \\
&\leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi} + \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{|t|>\delta}K_N(t)\,\mathrm{dt}
\end{aligned}$$

De plus, $K_N(t) = \frac{1}{N}\Big(\frac{\sin(\frac{Nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})}\Big)^2$. On a :
$(\delta < |t| \leq \pi) \Leftrightarrow (\frac{\delta}{2} < \frac{|t|}{2} \leq \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow (\sin(\frac{\delta}{2}) < \sin(\frac{|t|}{2}) \leq 1)$. D'où :
$\frac{1}{\sin(\frac{|t|}{2}} > \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}$. Donc : $K_N(t) \leq \frac{1}{N\sin^2(\frac{\delta}{2})}$
Et on a alors :

$$|\sigma_N f(x) - f(x)| \leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi} + \frac{2\|f\|_\infty}{N\sin^2(\frac{\delta}{2})}$$

On pase à la $\limsup_{N\to+\infty}$ et au $\sup_{x\in]-\pi,\pi[}$:
$\limsup\limits_{N\to+\infty} \|\sigma_N f - f\|_\infty \leq \frac{\omega(\delta)}{2\pi}$

La fonction f est continue sur le compact $[-\pi,\pi]$. Par le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. On peut alors faire $\delta \to 0$, ce qui nous donne que :
$\lim\limits_{N\to+\infty} \|\sigma_N f - f\|_\infty = 0$
$\square$

2) Pour $f \in L^1_{2\pi}$, on a :

$\sigma_N f(x) - f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))K_N(t)\,\mathrm{dt}$
d'où

$$\begin{aligned}
\|\sigma_N f - f\|_1 &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-t)-f(x))K_N(t)\,\mathrm{dt}\right|\mathrm{dx} \\
&\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|K_N(t)\,\mathrm{dt}\,\mathrm{dx} \\
&\quad \text{On applique Fubini-Tonelli car les fonctions sont mesurables positives} \\
&\leq \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|K_N(t)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}K_N(t)\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)-f(x)|\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt}
\end{aligned}$$

Posons $g(t) = \|\tau_t f - f\|_{L^1} \in \mathscr{C}_{2\pi}$. (g est continue 2π-périodique par densité de $\mathscr{C}_{2\pi}$ dans $L^1_{2\pi}$. On montre qu'elle est continue en prenant tout d'abord f continue et à l'aide d'une convergence dominée, puis on conclut par densité.)

$$\begin{aligned}
\|\sigma_N f - f\|_1 &\leq \int_{-\pi}^{\pi} g(-t)K_N(t)\,\mathrm{dt} \\
&= K_N * g(0) = \sigma_N(g)(0) \to g(0) = 0
\end{aligned}$$

d'après ce que l'on a montré dans la première partie.

□