

11 Ellipsoïde de John

ref : FGN algèbre 3 pas mal modifié

THÉOREME 11.1 *Soit K un compact contenant 0 dans son intérieur de l'espace euclidien standard $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde (centré en 0) contenant K qui soit de volume minimal.*

PREUVE. On entend par ellipsoïde la boule unité d'une forme quadratique définie positive. Les formes quadratiques sont identifiées aux matrices de $S(n, \mathbb{R})^{++}$ via $q(x) = {}^t x S x$. On note $\mathcal{E}(S) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid {}^t x S x \leq 1\}$ la boule unité pour la forme quadratique associée à S .

Volume d'un ellipsoïde :

L'ellipsoïde $\mathcal{E}(S)$ est l'image de la boule unité euclidienne B par une affinité orthogonale. Pour $S \in S(n, \mathbb{R})^{++}$, on note $S^{\frac{1}{2}}$ la racine carrée définie positive de S ¹. On a alors :

$$x \in \mathcal{E}(S) \Leftrightarrow {}^t x S x \leq 1 \Leftrightarrow S^{\frac{1}{2}} x \in B$$

Donc $\text{vol}(\mathcal{E}(S)) = \det(S)^{-\frac{1}{2}} \omega$ où ω est le volume de la boule unité B .²

Le problème se ramène donc à minimiser la fonction $\varphi(S) = \det(S)^{-\frac{1}{2}}$.

Existence du minimum :

On pose :

$$A = \{S \in S(n, \mathbb{R})^{++} \mid K \subset \mathcal{E}(S)\}$$

A est non vide car K est compact, donc inclus dans une grande boule euclidienne par exemple.

A est bornée parce que moralement plus S est grand plus son ellipsoïde est petite et elle ne peut pas être trop petite si elle veut contenir un compact d'intérieur non vide. Détaillons ce point. On admet que $\|S\|_2 = \rho(S)$, il suffit donc de contrôler le rayon spectral. Il existe une boule $B(0, r)$ incluse dans K par hypothèse. Pour $S \in A$, comme S est diagonalisable et son rayon spectral est une valeur propre strictement positive $\lambda > 0$, soit e un vecteur propre unitaire pour λ . Le vecteur re est dans $B(0, r) \subset \mathcal{E}(S)$, donc ${}^t(re) S re = \rho(S) r^2 \leq 1$, donc $\rho(S) \leq \frac{1}{r^2}$.

La fonction φ est minorée sur A par le volume de K qui est strictement positif car K est d'intérieur non vide. Elle admet donc une borne inférieure sur A , prenons donc une suite minimisante S_k , c'est-à-dire vérifiant :

$$\varphi(S_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \inf_{S \in A} \varphi(S)$$

A étant bornée, on peut, d'après Heine-Borel, quitter à extraire de S_k converge vers S . Il faut vérifier que S satisfait bien toutes les propriétés requises : L'inégalité ${}^t x S_k x \leq 1$ pour $x \in K$ passe bien à la limite, donc $\mathcal{E}(S)$ contient K . En effet, $S(n, \mathbb{R})^+$ est fermé dans $S(n, \mathbb{R})$ car les conditions ${}^t x S x \geq 0$ sont fermées. De plus $\varphi(S) \leq C < +\infty$, donc $\det(S) \geq C'$, et $S \in S^{++}(n, \mathbb{R})$. De plus $\mathcal{E}(S)$ contient K car les inégalités pour $x \in K$, ${}^t x S_k x \leq 1$ passent bien à la limite.

Unicité du minimum :

L'ensemble A sur lequel on a minimisé φ est convexe car $S(n, \mathbb{R})^{++}$ est convexe et les inégalités ${}^t x S x \leq 1$ pour $x \in K$ passent bien aux combinaisons convexes de S . Il suffit maintenant de montrer que φ est strictement convexe sur $S(n, \mathbb{R})^{++}$, on procède par calcul différentiel en montrant que la différentielle seconde de φ est définie positive. Pour $S \in S(n, \mathbb{R})^{++}$ et $H \in S(n, \mathbb{R})$, on a :

1. Attention, dans cette notation se cache le théorème de diagonalisation en b.o.n. des endomorphismes symétriques.

2. il me semble ridicule ici d'utiliser l'intégrale de Lebesgue et le théorème du changement de variables.

$$d_S \varphi(H) = -\frac{1}{2} \det(S)^{-\frac{3}{2}} \det(S) \operatorname{tr}(S^{-1}H) = -\frac{1}{2} \varphi(S) \operatorname{tr}(S^{-1}H)$$

Puis,

$$\begin{aligned} d_S^2 \varphi(H, H) &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \varphi(S) \operatorname{tr}(S^{-1}H) \right) \operatorname{tr}(S^{-1}H) - \frac{1}{2} \varphi(S) \operatorname{tr}(-S^{-1}HS^{-1}H) \\ &= \frac{1}{4} \varphi(S) ((\operatorname{tr}(S^{-1}H))^2 + 2 \operatorname{tr}(S^{-1}H)^2) \end{aligned}$$

Le terme $(\operatorname{tr}(S^{-1}H))^2$ est ≥ 0 . La matrice $S^{-1}H$ est diagonalisable à valeurs propres réelles car elle est auto-adjointe pour le produit scalaire ${}^t x S x$, donc son carré est de trace positive, et nulle seulement si $H = 0$.

On a donc montré que $d^2 \varphi_S$ est définie positive pour tout $S \in S(n, \mathbb{R})^{++}$, d'où φ strictement convexe et l'unicité du minimum.

□

Remarques : il serait peut-être plus clair de travailler sur l'ensemble des formes quadratiques plutôt que sur les matrices symétriques.

Application : Tout sous-groupe compact G de $\operatorname{GL}(n, \mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $\operatorname{O}(n, \mathbb{R})$. On prend l'union de tous les images de la boule unité euclidienne $\overline{B}(0, 1)$ par les éléments de G . Cela fait un compact K d'intérieur non vide auquel on applique le théorème pour trouver un ellipsoïde $\mathcal{E}(S)$ minimal. Pour $g \in G$, on a par unicité les ellipsoïdes $g(\mathcal{E}(S))$, $\mathcal{E}(S)$ et $g^{-1}(\mathcal{E}(S))$ sont égaux, puisque ils contiennent tous $g(K) = K$ et l'un parmi $g(\mathcal{E}(S))$ et $g^{-1}(\mathcal{E}(S))$ est de volume minimal (suivant la position de $|\det g|$ par rapport à 1.) Donc G préserve l'ellipsoïde $\mathcal{E}(S)$, c'est donc un isométrie de ${}^t x S x$. Un endomorphisme envoyant une base orthonormée euclidienne sur une base orthonormée de ${}^t x S x$ conjugue alors G en un sous-groupe de $\operatorname{O}(n, \mathbb{R})$.

Leçons concernées : matrices symétriques réelles, formes quadratiques réelles, endomorphisme remarquable d'un espace euclidien, compacité, applications différentiables, problèmes d'extremum, convexité en analyse, (déterminant).