

36 $\exp : S(n, R) \rightarrow S^{++}(n, \mathbb{R})$

THÉORÈME 36.1 $\exp : S(n, R) \rightarrow S^{++}(n, \mathbb{R})$ est un homéomorphisme.

PREUVE. *Espace d'arrivée :*

Si $A \in S(n, \mathbb{R})$, d'une part $\exp(A)$ est symétrique, d'autre part, par le théorème spectral, A est diagonalisable : $\exists P \in GL(n, \mathbb{R})$, (en fait $\mathcal{O}(n, \mathbb{R})$)

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_i)$$

Alors $P^{-1}\exp(A)P = \text{diag}(\exp \lambda_i)$, donc ses valeurs propres sont strictement positives, donc $\exp(A) \in S^{++}(n, \mathbb{R})$.

Bijektivité :

Soit $B \in S^{++}(n, \mathbb{R})$ défini positive, si $B = \exp(A)$, avec $A \in S(n, \mathbb{R})$. On va voir que A est déterminée par B . Si $\lambda \in \text{Sp}(A)$, alors $E_\lambda(A) \subset E_{e^\lambda}(B)$. Comme A est symétrique, elle est diagonalisable en base orthonormée, donc :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus E_\lambda(A) \subset \bigoplus E_{e^\lambda}(B)$$

Donc pour tout λ , il y a égalité $E_\lambda(A) = E_{e^\lambda}(B)$. Donc A et B ont les mêmes sous-espaces propres, et sur chacun le rapport d'homothétie de A est le logarithme de celui de B , uniquement déterminé car $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est bijective. Réciproquement l'endomorphisme construit ainsi est bien un logarithme symétrique de B ; Cela donne l'injectivité et la bijectivité de l'application.

Homéomorphisme :

L'exponentielle est continue car la série la définissant est normalement convergente. Il reste à montrer que la réciproque est continue. On va utiliser le critère séquentielle et on a besoin de contrôler des matrices par leur spectre ce qui est légitimé par le lemme suivant :

LEMME 36.2 Soit A une matrice symétrique, alors $\rho(A) = \|A\|_2$.

PREUVE. Tout d'abord, $\|\cdot\|_2$ est invariant par conjugaison par $O(n)$. En effet, $\|O^{-1}AO(x)\|_2 = \|Ax\|_2$. Comme les matrices symétriques sont diagonalisables en base orthonormée, il suffit de calculer la norme 2 d'une matrice diagonale. Si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$, on a :

$$\|Ax\|_2^2 = \sum_i \lambda_i^2 x_i^2 \leq \rho(A)^2 \|x\|_2^2$$

Donc $\|A\|_2 \leq \rho(A)$.

$$\|Ae_n\|_2^2 = \rho(A)^2 x_n^2 = \rho(A)^2 \|x_2\|^2$$

Donc $\|A\|_2 = \rho(A)$. □

Si $A_p = \exp(B_p)$ et $A = \exp(B)$ avec $A_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} A$, montrons que $B_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} B$. On a $A_p \rightarrow A$ et $A_p^{-1} \rightarrow A$ par continuité de l'application inverse sur $GL(n, \mathbb{R})$. Par le lemme, cela implique que $\rho(A_p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \rho(A)$ et $\rho(A_p^{-1}) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \rho(A^{-1})$. En particulier, les spectres des matrices (A_p) sont dans un compact commun de $\mathbb{R}_+^*$. Par passage au logarithme, les valeurs propres de B_p restent dans un compact commun de $\mathbb{R}$ et par le sens difficile du lemme, la suite B_p est bornée. Ainsi B_p admet une sous-suite convergente par Bolzano-Weierstrass, vers une matrice $\tilde{B}$ qui est encore symétrique car $S(n, \mathbb{R})$ est fermé et on a $\exp(\tilde{B}) = \exp(B)$ par continuité de l'exponentielle. On trouve donc $\tilde{B} = B$ par injectivité de $\exp$, puis B_p n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence, converge en fait vers B . □