

# Endomorphismes semi-simples

Thm: Soit  $f \in L(E)$  de pol. minimal  $\Pi_f = M_1^{\alpha_1} \dots M_r^{\alpha_r}$  (dec. en irreds).  
Alors  $f$  est semi-simple ssi  $\Pi_f = M_1 M_2 \dots M_r$ .

Preuve:

①  $F$  est stable par  $f$ .  $\forall q$   $F = \bigoplus_{i=1}^r [\text{Ker } M_i^{\alpha_i}(f) \cap F]$ .  
 $\forall i$ , soit  $F_i = \text{Ker } M_i^{\alpha_i}(f)$ . On sait que  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ .  
 $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ , on note  $p_i$  la projecteur sur  $F_i$  par rapport à  $\bigoplus_{j \neq i} F_j$ .  
 $\forall i$ ,  $p_i$  est un polynôme en  $f$  (cf. a. 2. p. 94).  
 $F$  est stable par  $f$ , donc par  $p_i$  d'où  $p_i(F) \subset F$ . De plus,  $p_i(F) \subset p_i(E) = F_i$ .  
Donc  $p_i(F) \subset F_i \cap F$  et comme  $\text{id}_E = p_1 + \dots + p_r$ ,  $F \subset p_1(F) + \dots + p_r(F)$   
 $= p_1(F) \oplus \dots \oplus p_r(F)$   
 $= (F_1 \cap F) \oplus \dots \oplus (F_r \cap F)$ .

L'inclusion réciproque est directe.

②  $\Pi_f$  irred  $\Rightarrow f$  semi-simple

Soit  $F$  est stable par  $f$ .  $\forall q$   $\exists$  un supplém.  $S$  de  $F$  stable par  $f$ .  
(dans  $E$ )

$\rightarrow$  Si  $F = E$  c'est terminé

$\rightarrow$  Sinon, soit  $x_1 \in E \setminus F$  et  $E_{x_1} = \{P(f)(x_1) \mid P \in K[X]\}$  qui est stable par  $f$ .  $\forall q$   $E_{x_1} \cap F = \{0\}$ .

Soit  $I_{x_1} = \{P \in K[X] \mid P(f)(x_1) = 0\}$  idéal de  $K[X]$  non réduit à 0. En effet,  $\Pi_f \in I_{x_1}$  donc

$\exists$  un pol. unitaire  $\Pi_{x_1} \in I_{x_1} \setminus \{0\}$  tel que  $\Pi_{x_1} = \Pi_{x_1} \Pi_f$ .

Comme  $\Pi_f \in I_{x_1}$ ,  $\Pi_{x_1} \mid \Pi_f$  et  $\Pi_f$  étant irred.,  $\Pi_{x_1} = \Pi_f$  et  $\Pi_{x_1}$  est irred..

Soit  $y \in E_{x_1} \cap F$ .  $\exists P \in K[X] / y = P(f)(x_1)$ . Si  $y \neq 0$ , alors  $P \notin I_{x_1}$  donc  $\Pi_{x_1} \nmid P$  et comme  $\Pi_{x_1}$  irred.,  $\Pi_{x_1} \nmid P$ .

Par Bezout,  $\exists U, V \in K[X] / UP + V\Pi_{x_1} = 1 \Rightarrow x_1 = U(f) \circ P(f)(x_1) + V(f) \circ \Pi_{x_1}(f)(x_1)$   
 $= U(f)(y)$ .

Or  $y \in F$  et  $F$  stable par  $f$ , donc  $x_1 = U(f)(y) \in F$ , absurde!!!

Donc  $y = 0$  et  $E_{x_1} \cap F = \{0\}$ .

Donc  $E_{x_1}$  et  $F$  sont en somme directe et  $E_{x_1}$  stable par  $f$ .

Si  $F \oplus E_{x_1} = E$  c'est terminé! Sinon on prend  $x_2 \in E \setminus (F \oplus E_{x_1})$  et on recommence

Au bout d'un nb fini d'itérations, on a trouvé ce que l'on voulait.

③ Preuve du Thm

$\Rightarrow$  Soit  $f$  semi-simple et  $\Pi_f = M_1^{\alpha_1} \dots M_r^{\alpha_r}$  (dec. en facteurs irred. unit. de  $K[X]$ ).  $\forall q$   $\forall i, \alpha_i = 1$ .

Supposons qu'il existe  $i$  q  $\alpha_i \geq 2$ . Si  $M = M_i$ ,  $\exists N \in K[X] / \Pi_f = M^2 N$ .

Soit  $F = \text{Ker } M(f)$ .  $F$  stable par  $f$  semi-simple donc  $\exists$  un supplém.  $S$  de  $F$ , stable par  $f$ .

$\forall q$   $MN(f)$  s'annule sur  $S$ : si  $x \in S$ , alors  $MN(f)(x) \in F$  car  $M(f)(MN(f)(x)) = \Pi_f(f)(x) = 0$   
et  $MN(f)(x) \in S$  car  $S$  est stable par  $f$ . Donc  $MN(f)(x) = 0$ .



Donc  $MN(f)$  s'annule sur  $S$ , donc sur  $F$  car si  $y \in F = \ker M(f)$ , alors  $MN(f)(y) = N(M(f)(y)) = 0$ .  
 Comme  $F \oplus S = E$ ,  $MN(f)$  s'annule sur  $E$ . Ceci contredit la minimalité du degré du pol. minimal  $\Pi_f = t^2 N$ .

" $\Leftarrow$ " Soit  $\Pi_f = M_1 \dots M_r$  avec les  $M_i$  irred. unit. et distincts  $2 \leq r$ .

Soit  $F$  sev de  $E$  stable par  $f$ .  $\forall i$ , notons  $F_i = \ker M_i(f)$ .

On a  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$  et par  $\oplus$   $F = \bigoplus_{i=1}^r [F \cap F_i]$ .

$\forall i$ ,  $F_i$  stable par  $f$ . Notons  $f_i \in \mathcal{L}(F_i)$  la restriction de  $f$  à  $F_i$ .

$M_i(f_i) = 0$  et  $M_i$  irred  $\Rightarrow$  pol. min. de  $f_i$  est  $M_i$ .

Par ②,  $f_i$  est donc semi-simple.

Or  $F \cap F_i$  stable par  $f_i$  donc  $\exists$  un sev  $S_i$  stable par  $f_i$  (donc par  $f$ ) tq

$$(F_i \cap F) \oplus S_i = F_i.$$

Posons  $S = S_1 \oplus \dots \oplus S_r$ . On a  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r = \bigoplus_{i=1}^r [(F_i \cap F) \oplus S_i]$

$$= \left[ \bigoplus_{i=1}^r (F_i \cap F) \right] \oplus \left[ \bigoplus_{i=1}^r S_i \right] \\ = F \oplus S \text{ et } S \text{ stable par } f.$$

$f$  est donc semi-simple  $\square$ .