Env. cvx de $O_n(\mathbb{R})$

Lemme : Les formes linéaires sur $M_n(\mathbb{K})$ sont les applications $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} ; M \to Tr(AM)$, où $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Preuve : Soit $f : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})' ; A \to f_A$ où $f_A(M) = Tr(AM)$

Mq f isomorphisme ;

- f injective : Si $A = (a_{ij})$ est tq $f_A = 0$, alors, $\forall 1 \leq i,j \leq n$, on a : $0 = f_A(E_{ij}) = Tr(AE_{ij})$.

Mais $AE_{ij} = \sum_{1 \leq k,\ell \leq n} a_{k\ell} E_{k\ell} E_{ij} = \sum_{1 \leq k,\ell \leq n} a_{k\ell} E_{ki} E_{ij}$

$= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{kj}$, d'où $0 = Tr(AE_{ij}) = Tr\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{kj}\right) = a_{ji}$.

Donc si $f_A = 0$ alors $a_{ji} = 0, \forall i,j \Rightarrow A = 0$.

- $\dim M_n(\mathbb{K}) = \dim M_n(\mathbb{K})' \Rightarrow f$ iso ∎.

Thm : $Conv_{M_n(\mathbb{R})}(O_n(\mathbb{R})) = B_{\|\cdot\|_2}(0,1)$.

Preuve :

- On a $B_{\|\cdot\|_2}(0,1) \supset Conv(O_n(\mathbb{R}))$.
- Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ tq $\|M\|_2 \leq 1$.

$\{M\}$ cpct et $conv(O(n))$ est cvx cpct (cathéodory).

Si $\{M\} \cap Conv(O(n)) = \phi$, par Hahn-Banach,

$\exists \phi \in L / \phi(M) > \sup_{O \in O(n)} \phi(O)$ (ie $\exists$ un hyperplan affine tq M d'un côté et env. cvx de l'autre).

$\geq \sup_{O \in conv(O(n))} \phi(O)$

(suffit 1 fermé et 1 compact) cf Brézis

Donc, pour mq $M \in conv(O(n))$, il suffit de mq :

$\phi(M) \leq \sup_{O \in O(n)} \phi(O)$, $\forall \phi \in M_n(\mathbb{R})$

Par le lemme, cela revient à mq $Tr(AM) \leq \sup_{O \in O(n)} Tr(AO)$, $\forall A \in M_n(\mathbb{R})$

On considère la décomposition polaire $A = \Omega S$ (ie Ω orthogonale et S symétrique positive) et une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée des vecteurs propres de S.

Alors, $\sup_{O \in O(n)} \mathrm{Tr}(AO) \geq \mathrm{Tr}(A\Omega^{-1}) = \mathrm{Tr}(\Omega^{-1}A)$
$= \mathrm{Tr}(S) = \sum_{i=1}^{n} \|Se_i\|_2$.

D'autre part, on a :
$$\mathrm{Tr}(AM) = \mathrm{Tr}(MA) = \sum_{i=1}^{n} \langle MAe_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle Ae_i, M^* e_i \rangle$$

↑ $i=1$
vrai avec la base canonique + x mat de $O(n)$

Par C-S : $\mathrm{Tr}(AM) \leq \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|_2 \|M^* e_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|_2 \|M^*\|_2 \|e_i\|_2$.

Or $\|M\|_2 \leq 1 \Rightarrow \|M^*\|_2 \leq 1$ et $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormée
donc : $\mathrm{Tr}(AM) \leq \sum_{i=1}^{n} \|Ae_i\|_2 = \sum_{i=1}^{n} \|Se_i\|_2$ ■.