

Théorème de Runge

Thm: Soit K compact de $\mathbb{C}$ complémentaire connexe et $a \in K^c$.
Alors $\frac{1}{z-a}$ est limite uniforme sur K de polynôme.

Preuve: Soit $P(K)$ l'adhérence des polynômes dans $C(K)$.

C'est une sous-algèbre de $C(K)$ car si P_n et Q_n polynômes alors

$$P_n \rightarrow f, Q_n \rightarrow g \Rightarrow P_n + Q_n \rightarrow f + g \text{ et } P_n Q_n \rightarrow fg \quad (\text{cf pour l'esp. normée } C(K))$$

Pour $a \in K^c$, on désigne par ϕ_a l'élément de $C(K)$ défini par:

$$\phi_a(z) = \frac{1}{z-a}. \text{ Ainsi, le thm se reformule en } a \in K^c \Rightarrow \phi_a \in P(K).$$

Soit $A = \{a \in K^c / \phi_a \in P(K)\}$.

Ilq: ① $A \neq \emptyset$ ② A fermé dans K^c ③ A ouvert dans K^c .

① Soit $R = \sup\{|z| / z \in K\}$. On va voir que $|a| > R \Rightarrow a \in A$.

En effet, soit $|a| > R$; $\phi_a(z) = \frac{1}{a} \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}}$ qui CV normalement sur K car $\left| \frac{z^{n+1}}{a^{n+1}} \right| \leq \left(\frac{R}{|a|} \right)^{n+1} R^{-1}$.

Donc en posant $P_N(z) = \sum_{n=0}^N \frac{z^n}{a^{n+1}}$, $P_N \rightarrow \phi_a$ dans $C(K)$ et $\phi_a \in P(K)$.

② $a \in \bar{A} \cap K^c \Rightarrow \phi_a \in P(K) (= P(K))^*$.

En effet, pour un tel a , soit $d = d(a, K)$ et (a_n) suite de A tendant vers a avec $|a_n - a| \leq d/2$,

$$\forall z \in K, \left| \frac{1}{z-a_n} - \frac{1}{z-a} \right| = \left| \frac{a_n - a}{(z-a_n)(z-a)} \right| \leq \frac{|a_n - a|}{d/2 \cdot d}$$

D'où, $\|\phi_{a_n} - \phi_a\|_{C(K)} \leq 2/d^2 |a_n - a| \Rightarrow *$ et ②.

③ Soit $a \in A$, $d = d(a, K)$, il suffit de mq $\bar{D}(a, d/2) \subset A$.

$$\text{Or, si } |h| \leq d/2 \text{ et } z \in K, \frac{1}{z-a-h} = \frac{1}{z-a} \frac{1}{1 - \frac{h}{z-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{(z-a)^{n+1}}$$

la série convergeant normalement sur K car son terme général est majoré par $d^{-n-1} d^{-n}$.

Donc $\sum_{n=0}^N h^n \phi_a^{n+1} \rightarrow \phi_{a+h}$ dans $C(K)$; or $\sum_{n=0}^N h^n \phi_a^{n+1} \in P(K)$ car $a \in A$ et $P(K)$ algèbre. Donc $\phi_{a+h} \in P(K)$ ce qui prouve ③. Donc $A = K^c$ car K^c connexe.

