

Banach-Steinhaus

Thm: E esp. de Banach, F evn. Soit $\mathcal{L}_c(E, F)$ ev des appls lin. C^0 de E dans F munie de la norme $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$.

Soit $H \subset \mathcal{L}_c(E, F)$: on a ou bien

$\rightarrow (\|f\|)_{f \in H}$ borné

ou bien $\rightarrow \exists x \in E / \sup_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$.

Preuve:

$\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $\Omega_k = \{x \in E / \sup_{f \in H} \|f(x)\| > k\}$.

Ω_k ouvert.

Si Ω_k dense dans $E, \forall k$, E étant complet, par le lemme de Baire: $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$ dense dans E , en particulier non vide.

Si on prend $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$, on a ce que l'on veut.

• Sinon, $\exists k / \Omega_k$ ne soit pas dense dans E .

$\exists x_0 \in E / \exists \rho > 0 / B(x_0, \rho) \cap \Omega_k = \emptyset$.

Donc $\forall x \in B(x_0, \rho), \sup_{f \in H} \|f(x)\| \leq k$.

Ainsi, $\forall x \in B(0, \rho), \forall f \in H, \|f(x)\| = \|f(x+x_0) - f(x_0)\| \leq \|f(x+x_0)\| + \|f(x_0)\| \leq 2k$.

Par C^0 de f , c'est vrai pour la boule fermée $\bar{B}(0, \rho)$.

Ainsi, $\forall f \in H, \forall x \in E, \|x\|=1, \|f(x)\| = \frac{1}{\rho} \|f(\rho x)\| \leq \frac{2k}{\rho}$.

Donc, $\forall f \in H, \|f\| \leq \frac{2k}{\rho}$, d'où le résultat. ■

Thm: On note $C_{2\pi}$ l'ens. des fcts de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π -périodiques et C^0 . $\forall f \in C_{2\pi}$, on note $\forall p \in \mathbb{Z}, c_p(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ip t} dt$.

$\forall n \in \mathbb{N}^+$, on considère $l_n: C_{2\pi} \rightarrow \mathbb{C}; f \rightarrow \sum_{p=-n}^n c_p(f)$.

On munit $C_{2\pi}$ de $\|f\|_{\infty} = \sup_{-\pi \leq t \leq \pi} |f(t)|$.

- ① $\forall n \in \mathbb{N}^*$, ℓ_n est une f.l. C^0 dont on peut calculer la norme
 ② $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\ell_n\| = +\infty$ + conclure.

Preuve:

① ℓ_n est clairement une f.l.

Comme $\sum_{p=-n}^n e^{ipt} = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}$, on a donc

que $\forall f \in C_{2\pi}$, $\ell_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)} f(t) dt$.

Donc si $\|f\|_{\infty} = 1$, on a $|\ell_n(f)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right| dt$.

$\forall \varepsilon > 0$, on définit $f_{\varepsilon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} ; t \mapsto \frac{D_n(t)}{|D_n(t)| + \varepsilon}$ où $D_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)}$.

On a $\|f_{\varepsilon}\|_{\infty} \leq 1$ et $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} |\ell_n(f_{\varepsilon})| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(\dots)}{\sin(t/2)} \right| dt$.

D'où $\|\ell_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin((2n+1)t/2)}{\sin(t/2)} \right| dt$.

② $|\sin(t/2)| \leq |t/2|$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\|\ell_n\| \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin((2n+1)t/2)}{t/2} \right| dt$
 $\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \left| \frac{\sin u}{u} \right| du$.

$\Rightarrow \|\ell_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

$C_{2\pi}$ est cplte (car fermé de $B(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ex de fcts bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui est complet).

Par Banach-Steinhaus, $\exists f \in C_{2\pi} / \sup_{n \in \mathbb{N}} |\ell_n(f)| = +\infty$
 ie la série de Fourier de f diverge en 0.