

Thm:

Table de S_n

Groupe de cardinal n .

Si $\forall k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, $g \in G$, g et g^k m CDC alors la td caract. de G est à val. dans $\mathbb{Z}$.

Preuve:

- On note $P_n = \{\text{entiers de } 1 \text{ à } n \text{ premiers à } n\}$, $\omega \in \mathbb{C}$ racine primitive n -ième de l'unité et ϕ_n n -ième pol. cyclo.

$\exists!$ auto. $\{ \iota_k \text{ sur } \mathbb{Q}[\omega], \forall k \in P_n / \iota_k \text{ fixe } \mathbb{Q} \text{ et } \iota_k \text{ envoie } \omega \text{ sur } \omega^k :$

→ Unicité: ω engendre $\mathbb{Q}[\omega]$

→ Existence: $\mathbb{Q}[\omega] \cong \mathbb{Q}[X]/(\phi_n) \cong \mathbb{Q}[\omega^k]$ (ω^k rac. prim. n -ième)

Donc on a un iso $\iota_k: \mathbb{Q}[\omega] \rightarrow \mathbb{Q}[\omega^k]$. Or $\mathbb{Q}[\omega^k] \subset \mathbb{Q}[\omega]$ et par égalité des dims on a l'automorphisme.

- $\alpha \in \mathbb{Z}[\omega]$. Alors $(\iota_k(\alpha) = \alpha, \forall k \in P_n \text{ ssi } \alpha \in \mathbb{Z})$.

" $\Leftarrow$ " Clair

" $\Rightarrow$ " Division euclidienne de α par ϕ_n : $\alpha = \sum_{i=0}^{\phi(n)-1} a_i \omega^i, a_i \in \mathbb{Z}$.

$\iota_k(\alpha) = \alpha, \forall k \in P_n$ se réécrit $\alpha e = V a, e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, V = ((\omega^i)^j)_{\substack{i \in P_n \\ j \in \{0, \phi(n)-1\}}}$

et $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{\phi(n)-1} \end{pmatrix}$.

Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, alors $V e_1 = e$ d'où $V a = \alpha e = \alpha V e_1$.

Or V inversible (Vandermonde des $\omega^k, k \in P_n$ 2 à 2 distincts).

Donc $a = \alpha e_1 \Rightarrow a_i = 0 \forall i > 0 \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Z}$.

- On considère $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ ~~l'espace~~ l'espace des fcts centrales par $K: f: g \mapsto f(g^k)$.

Mq si $\chi \in \hat{G}, \chi(g^k) = \chi(g)$.

→ $\chi(g)$ somme de νp λ_i donc Σ de puissance de ω (racine n -ième de 1).

Donc $\chi(g) \in \mathbb{Z}[\omega]$.

De plus, $\chi(g^k)$ somme des $\lambda_i^k \Rightarrow \chi(g^k) = \iota_k(\chi(g))$.

Mq χ inv. par $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ ssi χ à valeur dans $\mathbb{Z}$

χ inv. par $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ ssi $\chi(g^k) = \chi(g), \forall k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \forall g \in G$ ssi (lemme 2) $\chi(g) \in \mathbb{Z}$.

" $\Leftarrow$ " $\chi(g)$

Donc si g^k et g m CDC, $\forall k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$, comme χ est centrale, χ à valeur dans $\mathbb{Z}$.

Corollaire: La table de S_n est à valeur dans $\mathbb{Z}$.

Preuve: Mg si $k \wedge n! = 1$ alors g^k et g sont dans la même CDC, $\forall g \in S_n$.

Si $g = \prod_i \sigma_i$ (cycles disjoints) alors $g^k = \prod_i \sigma_i^k$.

Soit $\sigma = (i_1 \dots i_m)$ cycle, $m \leq n$. Donc $m \mid n! \Rightarrow m \wedge k = 1$.

Soit m' tq $(\sigma^k)^{m'}(i_1) = i_1$. Alors $\sigma^{km'}(i_1) = i_1 \Rightarrow m \mid km' \Rightarrow m \mid m'$.

Donc, σ^k est un m -cycle $\Rightarrow$ même CDC $\square$.