Gourdon analyse

9

Une fonction continue 2π-périodique dont la série de Fourier diverge en 0

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique, telle que, pour tout $x \in [0, \pi]$, on ait $f(x) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} \sin\left[\left(2^{p^3}+1\right)\frac{x}{2}\right]$.

· On commence par remarquer que la série ci-dessus converge normalement, donc f est bien définie et continue sur $[0, \pi]$. De plus, f est définie sur $[-\pi, 0]$ par $f(x) = f(-x)$, donc f est continue sur $[-\pi, \pi]$. Par 2π-périodicité, f est continue sur $\mathbb{R}$.

· Pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, on pose $a_{m,\nu} = \int_0^\pi \cos(mt) \sin\frac{(2\nu+1)t}{2}\, dt$ pour tout $m \in \mathbb{N}$

$$s_{q,\nu} = \sum_{i=0}^{q} a_{i,\nu} \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{N}$$

On a
$$a_{m,\nu} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\sin\left(\left(\frac{2\nu+1}{2}+m\right)t\right) + \sin\left(\left(\frac{2\nu+1}{2}-m\right)t\right)\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{2\nu+1+2m}\cos\left(\left(\frac{2\nu+1}{2}+m\right)t\right) - \frac{2}{2\nu+1-2m}\cos\left(\left(\frac{2\nu+1}{2}-m\right)t\right)\right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2\nu+1+2m} + \frac{1}{2\nu+1-2m}$$

$$= \frac{4\nu+2}{(2\nu+1)^2-4m^2}$$

On a donc $a_{m,\nu} \geq 0$ pour $m \leq \nu$, d'où $s_{q,\nu} \geq 0$ pour $q \leq \nu$.

On remarque ensuite que les $a_{m,\nu}$ sont égaux, au coefficient $\frac{2}{\pi}$ près, aux coefficients de Fourier $a_m(g_\nu)$ de $g_\nu : t \longmapsto \left|\sin\left(\left(\nu+\frac{1}{2}\right)t\right)\right|$ (sur $[-\pi, \pi]$ puis prolongée par 2π-périodicité. La fonction g_ν étant continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, sa série de Fourier converge vers g_ν. En particulier, on a $\frac{a_{0,\nu}}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} a_{m,\nu} = \frac{\pi}{2} g_\nu(0) = 0$,

donc la suite $(s_{q,\nu})_q$ converge vers $\frac{a_{0,\nu}}{2}$.

De plus, $a_{n,\nu}$ est positif pour $n \leqslant \nu$, donc $(s_{q,\nu})_q$ est décroissante à partir de $q=\nu$.
négatif pour $n > \nu$

Comme elle converge vers $\frac{a_{0,\nu}}{2}$, on a, pour tout $q \geqslant \nu$, $s_{q,\nu} \geqslant \frac{a_{0,\nu}}{2} \geqslant 0$.

Donc $s_{q,\nu} \geqslant 0$ pour tous $q, \nu \in \mathbb{N}$. Soit à présent $\nu \in \mathbb{N}$.

On a
$$s_{\nu,\nu} \geqslant \sum_{n=1}^{\nu} \frac{\nu+\frac{1}{2}}{(\nu+\frac{1}{2})^2 - n^2} \geqslant \sum_{n=1}^{\nu} \int_{n-1}^{n} \frac{(\nu+\frac{1}{2})\,dt}{(\nu+\frac{1}{2})^2 - t^2}$$
$$\geqslant \int_0^{\nu} \frac{(\nu+\frac{1}{2})\,dt}{(\nu+\frac{1}{2})^2 - t^2} = \frac{1}{2}\ln(4\nu+\cancel{3}\,1)$$

donc $s_{\nu,\nu} \geqslant \frac{\ln \nu}{2}$ pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$.

- On va montrer que la série de Fourier de f diverge en 0.

Comme f est paire, on a $b_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a
$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}\sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{t}{2}\right]\cos(nt)\,dt$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\int_0^{\pi}\sin\left[(2^{p^3}+1)\frac{t}{2}\right]\cos(nt)\,dt$$ par convergence normale

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\, a_{n,2^{p^3}-1}$$

donc
$$S_{2^{p^3}-1} = \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k(f) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\, s_{n,2^{p^3}-1}$$
$$\geqslant \frac{1}{p^2}\, s_{2^{p^3}-1,\,2^{p^3}-1}$$
$$\geqslant \frac{1}{2p^2}\ln(2^{p^3}-1) = \frac{p^3-1}{2p^2}\ln(2) \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

donc $S_{2^{p^3}-1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$ donc $\sum a_n(f)$ diverge.

Ainsi, la série de Fourier de f diverge en 0.