

Weierstrass (convolu)

Thm: Si $J \subset \mathbb{R}$ segment et $f: J \rightarrow \mathbb{R} \in C^0$ alors f est limite uniforme sur J d'une suite de fonctions polynôme.

Preuve:

Soit (χ_n) suite de fcts ≥ 0 , C^0 de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et nulles en dehors d'un compact (ie $\chi_n \in C_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et ≥ 0)

On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(t) dt = 1$ et $\forall \alpha > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|t| \geq \alpha} \chi_n(t) dt = 0$.

• $\forall f \in C_c^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $(f * \chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ C^0 unif. vers f sur $\mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. $f \in C^0$ à support compact donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Donc, $\exists \eta > 0 / \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \eta, |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Soit M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$ on ait $\int_{|t| \geq \eta} \chi_n(t) dt < \varepsilon$. Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(t) dt = 1$ et $\chi_n \geq 0$, on a $\forall n \geq N$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f * \chi_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (f(x-t) - f(x)) \chi_n(t) dt \right|$$

$$\leq \int_{|t| \geq \eta} |f(x-t) - f(x)| \chi_n(t) dt + \int_{|t| < \eta} |f(x-t) - f(x)| \chi_n(t) dt$$

$$\leq 2M\varepsilon + \varepsilon \int_{|t| < \eta} \chi_n(t) dt \leq 2M\varepsilon + \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_n(t) dt = (2M+1)\varepsilon.$$

D'où la C^0 unif.

• On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$ et $p_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; t \mapsto \begin{cases} \frac{(1-t^2)^n}{a_n} \text{ si } |t| \leq 1 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

p_n est une séquence de Dirac: $\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t) dt = \int_{-1}^1 p_n(t) dt = 1$ par def de a_n .
 $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt \geq 2 \int_0^1 t(1-t^2)^n dt = \left[-\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

Donc si $\alpha > 0$ (et $\alpha < 1$), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\int_{|t| \geq \alpha} p_n(t) dt = \frac{2}{a_n} \int_{\alpha}^1 (1-t^2)^n dt$
 $\leq \frac{2}{a_n} (1-\alpha^2)^n \leq 2(n+1)(1-\alpha^2)^n$. Or $(1-\alpha^2) < 1$ donc $\int_{|t| \geq \alpha} p_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Soit $f \in C^0$ à support dans $[-1/2, 1/2]$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f * p_n$ est une fonction polynôme sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f * p_n)(x) = (p_n * f)(x) = \int_{-1/2}^{1/2} p_n(x-t) f(t) dt \quad (*)$$

Lorsque $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$, $|x-t| \leq 1$ donc $p_n(x-t) = (1-(x-t)^2)^n$ qui s'écrit $\sum_{k=0}^{2n} g_k(t) x^k$ en développant ($\forall k, g_k$ fct polynôme).

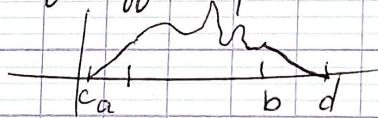
En remplaçant dans (*): $(f * p_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{-1/2}^{1/2} g_k(t) f(t) dt \right) x^k$ qui est bien une fct polynôme en x .

Ainsi, f est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de fonctions polynômes.

Conclusion: Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ segment et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ C^0 .

On prend un intervalle plus grand $[c, d]$ et on prolonge (strictement)

f sur $[c, a]$ par une fct affine qui vaut 0 en c et $f(a)$ en a (idem pour b et d).



On prolonge ensuite f sur $\mathbb{R}$ en la considérant nulle hors de $[c, d]$.

Le faire

(Par un chgt de variable, on se place dans le cas $[c, d] = [-1/2, 1/2]$).

Parce que l'on a trouvé, f est limite uniforme de polynômes sur $[c, d]$ donc sur $[a, b] \subset [c, d]$ $\square$.