Processus de Poisson — Chabanol

Soit (T_n) suite de va >0. Soient $S_0=0$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} T_k$.
$\forall t\geq 0$, on pose $N(t)=\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{S_n\leq t}$.

Proposition : Si le processus N défini ci-dessus est un processus de poisson de paramètre λ, alors les (T_n) sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ.

Lemme (en Prop) : Soient $T_1,\dots,T_n$ va indep. de même loi expo. de paramètre λ.
Alors $S_n=\sum_{i=1}^{n} T_i$ suit une loi Gamma $G(\lambda,n)$ de densité $x\mapsto \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}\exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$
De plus, $(S_1,\dots,S_n)$ a pour densité par rapport à la mesure de Lebesgue $(s_1,\dots,s_n)\mapsto \lambda^n \exp(-\lambda s_n)\mathbb{1}_{0<s_1<\dots<s_n}$.

Preuve :

(Prop) **Lemme :** • Soit $V\sim\Gamma(n,\lambda)$.

$$L_V(u)=\mathbb{E}[e^{uV}]=\frac{\lambda}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{ux}e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}dx=\frac{\lambda}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-x(\lambda-u)}(\lambda x)^{n-1}dx$$

finie dans un voisinage de 0 $\Rightarrow$ caractérise la loi. ; bien définie pour $\lambda-u>0$.

Donc en posant $y=x(\lambda-u)$, on a :

$$L_V(u)=\frac{\lambda}{(n-1)!}\int_0^\infty e^{-y}\left(\frac{\lambda y}{\lambda-u}\right)^{n-1}\frac{dy}{\lambda-u}=\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\lambda}{\lambda-u}\right)^n\int_0^\infty e^{-y}y^{n-1}dy=\left(\frac{\lambda}{\lambda-u}\right)^n$$

De même, si $T\sim\mathcal{E}(\lambda)$, $L_T(u)=\int_0^\infty e^{ux}\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda}{\lambda-u}\int_0^\infty e^{-y}dy=\frac{\lambda}{\lambda-u}$.

D'où, comme la transfo. de Laplace d'une somme de va indep est le produit des transfos de Laplace, on a le résultat.

• Soit f borélienne et bornée.

Alors, $\mathbb{E}[f(S_1,\dots,S_n)]=\int_{(\mathbb{R}^+)^n} f(t_1,t_1+t_2,\dots,t_1+t_2+\dots+t_n)\lambda^n e^{-\lambda t_1}\dots e^{-\lambda t_n}dt_1\dots dt_n$.

On pose $(s_1,\dots,s_n)=\phi(t_1,\dots,t_n)=(t_1,t_1+t_2,\dots)$.
ϕ difféo de $(\mathbb{R}^+)^n$ dans $\{(s_1,\dots,s_n)\mid 0<s_1<\dots<s_n\}$ de Jacobien 1.
Donc $\mathbb{E}[f(S_1,\dots,S_n)]=\int_{0<s_1<\dots<s_n} f(s_1,\dots,s_n)\lambda^n e^{-\lambda s_n}ds_1\dots ds_n$.

Preuve thm :

Si (N_t) processus de poisson, déterminons la loi de $(S_1, \dots, S_n)$.

Soit $0 < t_1 < t_1+s_1 < t_2 < t_2+s_2 < \dots < t_n < t_n+s_n$.

On a alors $\mathbb{P}(t_1 < S_1 < t_1+s_1 < t_2 < S_2 < t_2+s_2 < \dots < t_n < S_n < t_n+s_n)$

$= \mathbb{P}(N_{t_1}=0, N_{t_1+s_1}-N_{t_1}=1, \dots, N_{t_2}-N_{t_1+s_1}=0, \dots, N_{t_n+s_n}-N_{t_n} \geq 1)$

Par l'indep. des accroissements, et le fait qu'ils suivent une loi de Poisson, cette proba vaut :

$$\exp(-\lambda t_1)\exp(-\lambda s_1)\lambda s_1 \exp(-\lambda(t_2-(t_1+s_1)))\exp(-\lambda s_2)\lambda s_2 \dots$$
$$\exp(-\lambda(t_n-(t_{n-1}+s_{n-1})))(1-\exp(-\lambda s_n)) = \lambda^{n-1} s_1 \dots s_{n-1} \exp(-\lambda t_n)(1-\exp(-\lambda s_n))$$

On vérifie donc :

$$\int_{t_1 < u_1 < t_1+s_1 < t_2 < u_2 < t_2+s_2 < \dots < t_n < u_n < t_n+s_n} \lambda^n \exp(-\lambda u_n) \mathbb{1}_{0<u_1<\dots<u_n} du_1 du_2 \dots du_n$$
$$= \lambda^{n-1} s_1 \dots s_{n-1} \exp(-\lambda t_n)(1-\exp(-\lambda s_n)).$$

Donc $(S_1, \dots, S_n)$ a bien pour densité $\lambda^n \exp(-\lambda s_n) \mathbb{1}_{0<s_1<\dots<s_n}$.

Par le th chgt de var. que pour le lemme, on en déduit que les variables $(T_1, \dots, T_n)$ sont bien indépendantes de loi expo. de paramètre λ ☒.

$$\mathbb{E}[f(T_1, \dots, T_n)]$$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{s_n > \dots > s_1} f(s_1, \dots, s_n - s_{n-1})\right] = \int f(t_1, \dots, t_n) \dots$$

+ chgt de variable ϕ^{-1}

$$= \int_{0<s_1<\dots<s_n} f(s_1, \dots, s_n - s_{n-1}) \lambda^n e^{-\lambda s_n} ds_1 \dots ds_n$$

$$\phi^{-1} = \int_{(\mathbb{R}_+)^n} f(t_1, \dots, t_n) \lambda^n e^{-\lambda t_1} \dots e^{-\lambda t_n} dt_1 \dots dt_n.$$

$(T_1, \dots, T_n)$ a pour densité $\lambda^n e^{-\lambda t_1} \dots e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_{(\mathbb{R}_+)^n}$

Donc T_i a pour densité $\int_{(\mathbb{R}_+)^{n-1}} \lambda^n e^{-\lambda t_1} \dots e^{-\lambda t_n} \mathbb{1}_{(\mathbb{R}_+)^n} dt_1 \dots \hat{dt_i} \dots dt_n$

$= \lambda e^{-\lambda t_i} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ et $\mathbb{P}_{(x_1, \dots, x_n)} = \mathbb{P}_{x_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{P}_{x_n}$.

car $\mathbb{E}[f(X_i)]$

$= \mathbb{E}[f(\pi_i(X))] = \int_{\mathbb{R}^d} f(x_i) p(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d$

$= \int_{\mathbb{R}} f(x_i) \left(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} p(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d\right) dx_i = \int_{\mathbb{R}} f(x_i) p_i(x_i) dx_i.$

"STAR" 12 Systeme/Wz. ges. gesch.®