

Brouwer

Thm: Soit B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.
Toute application C^∞ $F: B \rightarrow B$ admet un pt fixe.

Preuve: On suppose par l'absurde qu'il existe $F: B \rightarrow B$ C^∞
t.q. $\forall x \in B, F(x) \neq x$.

On pose $f(t, x) = x + t a(x) (x - F(x))$ où $a: B \rightarrow \mathbb{R}$ est l'application qui à x envoie la plus gde racine de $\|x + \alpha(x - F(x))\|^2 = 1$ notée α .

Il qd est C^∞ .

Pour cela mg a est C^∞ :

$a(x)$ vérifie $\|x\|^2 + 2a(x) \langle x, x - F(x) \rangle + a(x)^2 \|x - F(x)\|^2 = 1$.

On a: $\Delta(x) = 4 \langle x, x - F(x) \rangle^2 - 4(\|x\|^2 - 1) \|x - F(x)\|^2$.

$\rightarrow$ si $x \notin S, \langle x, x - F(x) \rangle^2 > 0$ et $(\|x\|^2 - 1) \|x - F(x)\|^2 < 0$.

Donc $\Delta(x) > 0$ et $a(x) = \frac{-\langle x, x - F(x) \rangle + \sqrt{\Delta(x)}}{\|x - F(x)\|^2}$.

$\rightarrow$ si $x \in S, a(x) = 0$ (on a $a(x) = \frac{-\langle x, x - F(x) \rangle + \langle x, x - F(x) \rangle}{\|x - F(x)\|^2} = 0$)

Donc a est C^∞ .

On pose $I(t) = \int_B D_0(t, x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$ avec

$D_0(t, x_1, \dots, x_n) = \det \left(\begin{matrix} \partial_t f \\ \partial_{x_1} f \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f \end{matrix} \right)$ (omission)

Si $t=0, f(0, x) = x$ donc $D_0(0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Ainsi, $I(0) = \text{Vol}(B) \neq 0$.

Si $t=1, f(1, x) = x + a(x)(x - F(x)) \in S$ et donc $f(1, \cdot): B \rightarrow S$ n'est pas un difféomorphisme local car S ne contient aucun voisinage d'un de ses pts dans $\mathbb{R}^n$.

La contraposée du thm d'inversion locale donne donc que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in B, D_0(1, x_1, \dots, x_n) = 0$ et donc $I(1) = 0$.

Par le thm de dériva 0 sous le signe intégrale, I est C^1 et
 $I'(t) = \int_B \frac{\partial D_0}{\partial t}(t, x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$.

On calcule $\frac{\partial D_0}{\partial t}(t, x_1, \dots, x_n)$.

Soit $g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^∞ .

Si $i \in \{0, \dots, n\}$, on note $D_i = \det(\partial_0 g, \dots, \partial_{i-1} g, \partial_{i+1} g, \dots, \partial_n g)$.

$$M_g \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \frac{\partial D_i}{\partial x_i} &= \det(\partial_i \partial_0 g, \partial_1 g, \dots) = \det(\partial_i \partial_1 g, \dots) + \dots \\ &= \sum_{\bar{j} \neq i} \det(\partial_i \partial_{\bar{j}} g, \partial_0 g, \dots, \partial_{\bar{j}-1} g, \partial_{\bar{j}+1} g, \dots, \partial_n g) \\ &\quad \times \begin{cases} (-1)^{\bar{j}} & \text{si } \bar{j} < i \\ (-1)^{\bar{j}-1} & \text{si } \bar{j} > i \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\partial D_i}{\partial x_i} &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{\bar{j} \neq i} \begin{cases} (-1)^{\bar{j}}, \bar{j} < i \\ (-1)^{\bar{j}-1}, \bar{j} > i \end{cases} \det(\dots) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par Schwarz

$$\begin{aligned} \hookrightarrow & \sum_{i=0}^n (-1)^i \left(\sum_{\bar{j} < i} (-1)^{\bar{j}-1} \det(\dots) + \sum_{\bar{j} > i} (-1)^{\bar{j}} \det(\dots) \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{\bar{j} < i} (-1)^{\bar{j}-1} \det(\dots) + \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{\bar{j} > i} (-1)^{\bar{j}} \det(\dots) \\ &\stackrel{\text{Schwarz}}{=} \sum_{i=0}^n \sum_{\bar{j} > i} \left[(-1)^i (-1)^{\bar{j}-1} + (-1)^i (-1)^{\bar{j}} \right] \det(\dots) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \frac{\partial D_0}{\partial t} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial D_i}{\partial x_i}.$$

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_B \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial D_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \dots dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int \dots \int \frac{\partial D_i}{\partial x_i} dx_i dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n \end{aligned}$$

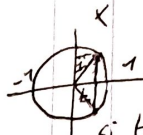
Si $x = (x_1, \dots, x_n) \in S$, on a $\partial_t f = a(x)(x - F(x)) = 0$

Donc $D_i = \det(\partial_t f, \dots) = 0$ sur S et $I' = 0 \Rightarrow I$ est constante ce qui est absurde.

Bonus: • On a que $\int_B \frac{\partial D_1}{\partial x_1} d\mu = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-t^2}}^{\sqrt{1-t^2}} \frac{\partial D_1}{\partial x_1} dx_1 dt$

$= \int_{-1}^1 \left[\underbrace{D_1(t, \sqrt{1-t^2})}_{\text{CS}} - \underbrace{D_1(t, -\sqrt{1-t^2})}_{\text{CS}} \right] dt$

si t varie de -1 à 1
 x varie de $-\sqrt{1-t^2}$ à $\sqrt{1-t^2}$ (Pythagore).



• Cas C^0 , prendre $F_\varepsilon: B \rightarrow \mathbb{R}^n$ C^∞ qui $\mathcal{C}$ unif vers $F: B \rightarrow B$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Poser $G_\varepsilon = F_\varepsilon \frac{\|F\|_\infty}{\|F_\varepsilon\|}$.

G_ε a un pt fixe $x_\varepsilon \in B$.

x_ε a une valeur d'adhérence $x \in B$, et $F(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_\varepsilon(x_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x_\varepsilon = x$.

Donc F a un point fixe.