Newton polynômial

On considère le polynôme $P(x) = (x-l_1)^{m_1} \dots (x-l_r)^{m_r}$, où $l_1 < \dots < l_r$ réels et m_i entiers non nuls.

On pose $x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$.

Proposition : si $m_r = 1$ alors $\forall c > 0$, on a $|x_n - l_r| = o(c^n)$.

Preuve :

$$\forall x,\ \frac{P'(x)}{P(x)} = \left(\log|P(x)|\right)' = \left(\sum_{i=1}^{r} m_i \log(|x-l_i|)\right)' = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-l_i}.$$

En dérivant : $\frac{P''(x)P(x) - (P'(x))^2}{P(x)^2} = -\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-l_i)^2}$

ie $\frac{P''(x)P(x)}{P(x)^2} = \frac{(P'(x))^2}{(P(x))^2} - \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-l_i)^2}$,

d'où $f'(x) = \frac{P(x)P''(x)}{(P'(x))^2} = \frac{P(x)P''(x)}{P(x)^2}\frac{P(x)^2}{P'(x)^2}$

$= 1 - \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{x-l_i}\right)^{-2} \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i}{(x-l_i)^2}$ avec $f(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}$.

Donc $\lim_{x \to l_r} f'(x) = 1 - \frac{1}{m_r}$.

Si $m_r = 1$, $f'(l_r) = 0$. Par Taylor-Lagrange, il existe $y_n \in]l_r, x_n[$ tq $x_{n+1} - l_r = f(x_n) - f(l_r) = (x_n - l_r) f'(y_n)$.

Soit $c > 0$. $x_n \to l_r$, donc $\exists n_0 \mid \forall n \geq n_0,\ |f'(y_n)| < c$.

Donc $|x_{n+1} - l_r| \leq c\,|x_n - l_r|$

et $\forall n \geq n_0,\ |x_n - l_r| \leq c^{n-n_0} |x_{n_0} - l_r| = O(c^n)$.

Quitte à prendre $d > c$, on a $|x_n - l_r| = o(d^n)$.

Proposition 2 : Si $m_r \geq 2$, alors $\exists c > 0 \mid |x_n - l_r| \sim c\left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$.

Preuve : On a $f'(l_r) = 1 - \frac{1}{m_r}$ et par Taylor-Lagrange,
$\exists y_n \in]l_r, x_n[\mid x_{n+1} - l_r = (x_n - l_r) f'(y_n)$.
Donc $\log(x_{n+1} - l_r) - \log(x_n - l_r) = \log f'(y_n)$ qui CV vers $\log f'(l_r)$.
Par Cesàro, $\log(x_n - l_r) \underset{n \to +\infty}{\sim} n \log f'(l_r)$.
En particulier, $\forall 1 > d > f'(l_r)$, $|x_n - l_r| = O(d^n)$ (*)
Par Taylor-Lagrange, ~~$\exists c \in]l_r, x_n[$~~ (Inégalité)
$x_{n+1} - l_r = f'(l_r)(x_n - l_r) + O((x_n - l_r)^2)$
D'où $\varepsilon_n = \frac{x_{n+1} - l_r}{f'(l_r)(x_n - l_r)} - 1 = O(x_n - l_r)$.
Ainsi, $\log(x_{n+1} - l_r) - \log(x_n - l_r) - \log f'(l_r) = \log(1 + \varepsilon_n) = O(d^n)$,
et la série qui a pour terme général $\log(x_{n+1} - l_r) - \log(x_n - l_r) - \log f'(l_r)$ CV vers un réel λ.
Donc, $x_n - l_r \underset{n \to +\infty}{\sim} e^{\lambda} f'(l_r)^n$ ■.

$u_n \sim v_n$ si $u_n - v_n = o(v_n)$ ie $\frac{u_n - v_n}{v_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
$\varepsilon_n \forall n$
ou $u_n = v_n + o(v_n)$.

(*) $\log(x_n - l_r) - \log(f'(l_r)^n) = \log\left(f'(l_r)^n\right) \varepsilon(n)$, $\varepsilon(n) \underset{n \to +\infty}{\to} 0$
$\log\left(\frac{x_n - l_r}{f'(l_r)^n}\right)$
$\Rightarrow \frac{x_n - l_r}{f'(l_r)^n} = f'(l_r)^{n\varepsilon(n)}$
$\Rightarrow \frac{x_n - l_r}{d^n} < f'(l_r)^{n\varepsilon(n)} \leq 1$ car $f'(l_r) \in]0,1[$.
$\Rightarrow x_n - l_r = O(d^n)$

(o) $\log(1+\varepsilon_n) = O(d^n)$ si $\varepsilon_n = O(d^n)$. $(1 > d > |f'(l_r)|)$.

$= \varepsilon_n + o(\varepsilon_n)$.

DL de la série géométrique

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\log(x_n - l_r) - n\log|f'(l_r)| - \lambda\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_n - l_r \underset{n\to+\infty}{\sim} f'(l_r)^n e^{\lambda}$$

On a ainsi :

$\log(x_n - l_r) - n\log|f'(l_r)| \to \mu \in \mathbb{R}$

Donc $\dfrac{|x_n - l_r|}{|f'(l_r)|^n} \to e^{\mu}$

et $|x_n - l_r| \sim |f'(l_r)|^n e^{\mu}$ d'où l'équivalence.