Dunford et application

Thm : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq P_f pol. car. de f est scindé sur $\mathbb{K}$.
$\exists !$ couple $(d,n) \in \mathcal{L}(E)^2$ avec d dz et n nilpotent tq :
(i) $f = d+n$ et (ii) $dn = nd$.

Preuve :

$P_f = (-1)^n \prod_{i=1}^{s} (X-\lambda_i)^{\alpha_i}$ et $N_i = \ker (f-\lambda_i id)^{\alpha_i}$ (ss esps caractéristiques de f).

Existence :

$E = N_1 \oplus \dots \oplus N_s$, il suffit donc de définir d et n sur chaque N_i.

$\forall i, \forall x \in N_i$, $d(x) = \lambda_i x$ et $n(x) = f(x) - \lambda_i x$.

Donc $d_i = d_{|N_i} = \lambda_i Id_{|N_i}$ et $n_i = n_{|N_i} = f_{|N_i} - \lambda_i id_{|N_i}$.
d_i et $n_i \in \mathcal{L}(N_i)$ car N_i stable par f donc par ~~d~~ n et N_i stable par d.

Ici d est dz. $\forall i$, $n_i^{\alpha_i} = 0$ par définition de N_i.
Si $\alpha = \sup \alpha_i$, n^α s'annule sur chaque N_i donc sur E et donc $n^\alpha = 0$.

Reste à mq d et n commutent : $\forall i, d_i = \lambda_i Id_{N_i}$ donc $n_i o d_i = d_i o n_i$.
Donc d et n commutent sur chaque N_i, donc sur $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$.

Unicité :

(d', n') un autre couple vérifiant les conditions.
$f o d' = d' o f$, donc $\forall i$, N_i stable par d' (car $\forall x \in N_i$, $(f-\lambda_i Id)^{\alpha_i}(d'(x)) = d' o (f-\lambda_i Id)^{\alpha_i}(x) = 0$). Comme $d_{N_i} = \lambda_i Id_{N_i}$, $do d' = d' o d$ sur N_i.
C'est vrai pour tout i donc d et d' commutent $\left(E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i\right)$.
d et d' sont dz. On peut les diagonaliser dans une même base donc $d-d'$ dz.

Comme $n = f-d$, $n' = f-d'$ et $do d' = d' o d$, n et n' commutent.
Soit p et q tq $n^p = n'^q = 0$, alors $(n-n')^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} n^k n'^{p+q-k} (-1)^{p+q-k} = 0$
Donc $n-n' = d'-d$ nilpotente et dz $\Rightarrow d'-d = 0$. Donc $d = d'$ et $n = n'$.

Thm: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, χ_A scindé.

$\exp(A)$ dz $\Leftrightarrow$ A dz

Preuve:

"$\Leftarrow$" direct (C° x matriciel)

"$\Rightarrow$" $A = D + N$, $DN = ND$ (D unford)

$\exp(A) = \exp(D)\exp(N)$ (car $ND = DN$)

$\exp(N) = \exp(A)\exp(-D)$

→ commutent car A et D commutent donc co-dz.

$\Rightarrow \exp(N)$ dz

$\exp(N) = I_n + N + \dots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!}$

et $\exp(N)$ dz donc $\exp(N) = I_n$

et $P(X) = X + \dots + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!}$ annule N.

De plus, X^k annule N $\Rightarrow X$ annule N ☒.