

Thm (Plancherel): Soit $f \in L^1 \cap L^2$ Alors
 $\| \hat{f} \|_2 = \| f \|_2$ (En particulier $\hat{f} \in L^1 \cap L^2 \subset C^0$ et cette partie est dense.)

Corollaire: $\exists!$ opérateur L^2 dans L^2 qui coïncide avec f sur $C^\infty \cap L^2$.

$$dm(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dy$$

Preuve (thm): Soit $f \in L^1 \cap L^2$. On pose $\tilde{f}(x) = f(-x)$
 et $g = f * \tilde{f}$ (possible car $f \in L^1$), on a alors $g \in L^1$.

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \tilde{f}(-y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(x+y) f(y) dy = \langle f, f-x \rangle$$

$$y \mapsto f(y+x)$$

Par C^0 de $x \rightarrow f_x$ de $\mathbb{R}$ dans L^2 et du produit scalaire, g est C^0 .
De plus, g bornée par $\|f\|_{L^2}^2$ (Schwarz ^{Cauchy}).
En utilisant que $f * \bar{f} = \hat{f} * \hat{\bar{f}}$, on a $\hat{g}(x) = |\hat{f}(x)|^2 \rightarrow$ car $\hat{f} = \hat{\bar{f}}$.

On introduit $h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2}$, $\lambda > 0$

On a $h_\lambda > 0$, d'intégrale 1 et $\int_{|x| \geq \eta} h_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

C'est la transformée de Fourier inverse de $H(\lambda) = e^{-\lambda|\xi|}$.

On regarde alors $g+h_1(0)$. Comme $g \in L^1$, par Fubini, on a:

$$\begin{aligned} g * h_\lambda(0) &= \int g(-t) h_\lambda(t) d\mu(t) = \int g(-t) \int H(\lambda x) e^{ixt} dx d\mu(t) \\ &= \int \left(\int g(-t) e^{ixt} d\mu(t) \right) H(\lambda x) d\mu(x) \\ &= \int \hat{g}(x) H(\lambda x) d\mu(x) \end{aligned}$$

En utilisant que $g \in C^0$ en 0, bornée, que h_λ d'intégrale 1 et que $h_\lambda(y) = \lambda^{-1} h_1(y/\lambda)$, on a $g + h_\lambda(0) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} g$ et $\|g + h_\lambda\|_2^2 \rightarrow \|g\|_2^2$.

De plus, $\hat{g}(x) \geq 0$ et $H(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ en croissant donc par le TCM
 $g = h_x(0) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int \hat{g} = \|\hat{g}\|_2^2$, d'où $\|g\|_2^2 = \|\hat{g}\|_2^2$ et $\hat{g} \in L^2$

$$\begin{aligned}
 & (g(x)h(x) - g(x))x \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x)h(x) - g(x))x \, dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (g(x)h(x) - g(x))x \, dx
 \end{aligned}$$

Pour mq l'image γ est dense, on regarde les transformées de Fourier de $e^{i\alpha x} H(\lambda_x) \in L^1 \cap L^2$ qui sont les $h_\lambda(\alpha-t)$.
Si $f \in L^2 \cap \gamma^\perp$, alors $\forall \alpha, \int \bar{f}(t) h_\lambda(\alpha-t) dt = 0 = f * h_\lambda(\alpha)$.

Puis, en utilisant que h_λ est borné, $\bar{f} \in L^2$ et en utilisant Jensen on a que $\int \bar{f} * h_\lambda(\alpha) dt \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \bar{f}$ dans L^2 .

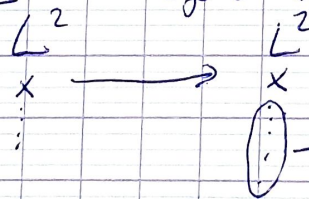
Donc $\gamma^\perp = \{0\}$ ie γ dense $\square$

en fait de tps

Preuve corollaire: $\square$

$L^1 \cap L^2$ dense dans L^2 (prendre pour $f \in L^2$ la suite $f \chi_{[-n,n]}$)
 $\tilde{F}: L^1 \cap L^2 \rightarrow L^2 \subset C^0$ pour la norme 2 car c'est une isométrie et L^2 cplte, par le prolongement des applis unif C^0 ,
 $\exists!$ prolongement de $\tilde{F}$ à L^2 . C'est encore une isométrie de la norme 2 (passage à la limite dans l'égalité de Plancherel) $\square$.

A savoir: si l'image est dense, l'opérateur est surjectif:



$\left(\begin{array}{c} \vdots \\ x \end{array} \right) \rightarrow$

on prend une suite qui cv vers un élément de L^2 et d'au l'image. Quand on la renvoie par image inverse, c'est une suite de Cauchy dans L^2 par isométrie, donc qui cv et donc on peut associer sa limite à son image donnée par la limite de la première suite.

Par continuité de $\tilde{F}$ on a ce que l'on veut.

$\tilde{F}$ bij de $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$
et $\mathcal{S}$ dense dans L^2 .