

Par 5 pts passent une conique

Thm: Par cinq points distincts A, B, C, D, E , dont 4 quelconques ne sont pas alignés, passe une unique conique $\mathcal{C}$.
En outre, la conique $\mathcal{C}$ est non dégénérée ssi 3 pts quelq de ces 5 points sont non alignés.

Preuve: (Si les 5 pts sont alignés, on a une infinité de coniques (prendre la droite + une autre droite quelq))

4 pts quelconques ne sont pas alignés.

On suppose donc que A, B, C forment un triangle non aplati, et donc une base affine du plan. On note (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les coordonnées barycentriques de D et E dans cette base.

Une conique $\mathcal{C}$ passe donc par ces 5 pts ssi elle a une équation de la forme $pYZ + qZX + rXY = 0$, où (p, q, r) est solution de

$$\begin{cases} p x_1 y_1 + q z_1 x_1 + r x_1 y_1 = 0 \\ p x_2 y_2 + q z_2 x_2 + r x_2 y_2 = 0 \end{cases}$$

Ce système est de rang 2.

En effet, il est de rang ≤ 2 , et si il était de rang ≤ 1 on aurait que $d_1 = x_1 x_2 (z_1 y_2 - z_2 y_1)$, $d_2 = y_1 y_2 (x_1 z_2 - x_2 z_1)$ et $d_3 = z_1 z_2 (y_1 x_2 - y_2 x_1)$ seraient nuls.

Or, si $D, E \notin (BC)$, alors $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$
d'où $d_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow A, D, E \text{ alignés.}$

Aussi, $x_1 z_2 - x_2 z_1 \neq 0$ sinon A, D, E, C alignés. Absurde car 4 pts quelq doivent être non alignés.

De même, $y_1 x_2 - y_2 x_1 \neq 0$.

Si $y_1 y_2 = 0$, alors $y_1 = 0$ et $D \in (AC)$ donc A, D, E, C alignés
ou $y_2 = 0$ et $E \in (AC)$.

Même raisonnement pour $z_1 z_2 = 0$.

Donc $d_2 \neq 0$ et $d_3 \neq 0$.

Absurde

Si $D \in (BC)$, alors $x_1 = 0$ et donc $x_2 \neq 0$
 (sinon $E \in (BC)$ et D, E, B, C alignés) et
 $y_1 z_1 \neq 0$ (sinon $E = B$ ou C).

Comme $d_2 = -y_1 z_1 x_2 y_2$ et $d_3 = y_1 z_1 x_2 z_2$,
 il suffit de vérifier que y_2 et z_2 non nul, ce
 qui est le cas car sinon $E = A$.

Donc, $ray = 2 \Rightarrow$ une droite vectorielle de solutions
 $\Rightarrow$ une unique conique solution.

$\Leftarrow$ Supposons que la conique soit ~~non~~ dégénérée.

A l'ors $\begin{vmatrix} 0 & r & q \\ r & 0 & p \\ q & p & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow pqr = 0$

Une conique est non dég. ssi la $0q$ associée est non dégénérée d'où ce résultat.

Si on prend $p = 0$, alors l'équation devient
 $qXZ + rXY = 0$ ie $X(qZ + rY) = 0$ eq. de l'union
 de deux droites sur lesquelles on ne peut placer 5 pts
 sans que 3 soient alignés.

$\Rightarrow$ Si 3 pts parmi les 5 sont alignés, alors la conique est l'union de deux droites (sinon on a pas l'unicité), qui est bien une conique dégénérée car d'équation:

$\phi(x, y, z) \psi(x, y, z) = 0$, ϕ et ψ formes linéaires.
 $\phi\psi = \frac{1}{4} ((\phi+\psi)^2 - (\phi-\psi)^2) \Rightarrow \phi\psi$ de rang ≤ 2 .

ABC triangle

$R = (A, \vec{AB}, \vec{AC})$ repère affine.

M de coordonnées barycentriques (x, y, z) a pour coordonnées cartésiennes $\left(\frac{x}{x+y+z}, \frac{y}{x+y+z}\right)$

$$x \vec{AM} + y \vec{BM} + z \vec{CM} = 0$$

$$\Rightarrow x \vec{AM} + y \vec{BA} + y \vec{AM} + z \vec{CA} + z \vec{AM}$$

$$\Rightarrow (x+y+z) \vec{AM} = y \vec{AB} + z \vec{AC}$$

$$\Rightarrow \vec{AM} = \frac{y}{x+y+z} \vec{AB} + \frac{z}{x+y+z} \vec{AC}$$

Equation conique: $aU^2 + bUV + cV^2 + dU + eV + f = 0$

en prenant $\left(U = \frac{y}{x+y+z}, V = \frac{z}{x+y+z}\right)$ puis en réinjectant

on a la conique en coordonnées barycentriques.