Equa° matricielle

Thm : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tq $\forall \lambda$ vp de A ou B, $Re(\lambda) < 0$.
$\forall C \in M_n(\mathbb{R})$, $\exists !$ matrice $X \in M_n(\mathbb{R}) / AX + XB = C$.

Preuve :

- On cherche une solu° $Y : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ de $Y' = AY + YB$ (E) tq $Y(0) = C$, $C \in M_n(\mathbb{R})$.

C'est une équa diff à coeffs constants, linéaire, donc une solu° existe et est unique (Cauchy-Lipschitz).
$Y : t \to e^{tA} C e^{tB}$ convient et vérifie $Y(0) = C$.

- Mq si $A \in M_n(\mathbb{C})$ de vp $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ avec $Re(\lambda_i) < 0$, $\|\cdot\|$ norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{C})$, alors $\exists \alpha > 0, K > 0 / \|e^{tA}\| \leq K e^{-\alpha t}, \forall t \geq 0$.

On peut écrire $A = D + N$, D diagonalisable de vp $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et N nilpotente avec $DN = ND$.

Soit $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $D = P^{-1} D_1 P$, D_1 mat. diago.
$\forall t \in \mathbb{R}$, e^{tD_1} mat. diago. de coeffs $e^{t\lambda_i}$.
On a $\|e^{tD_1}\|_\infty = \sup_i |e^{t\lambda_i}| = e^{-ct}$, où $c = -\sup_i Re(\lambda_i) > 0$.
Les normes sont équiv. en dim finie. Donc $\exists K_1 > 0 / \|e^{tD_1}\| \leq K_1 e^{-ct}, \forall t \in \mathbb{R}$.
$e^{tD} = P^{-1} e^{tD_1} P, \forall t \in \mathbb{R}$.

Donc, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|e^{tD}\| \leq K_2 e^{-ct}$ avec $K_2 = \|P^{-1}\| \cdot K_1 \|P\|$
Comme N nilpotente, $\forall t \in \mathbb{R}$, $e^{tN} = I_n + tN + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} N^{n-1}$.
Donc $\|e^{tN}\| = o_{t \to +\infty}(t^n)$.
Dct N commutent, donc $e^{tA} = e^{tD + tN} = e^{tD} e^{tN}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$,
donc $\|e^{tA}\| \leq \|e^{tD}\| \cdot \|e^{tN}\| = o_{t \to +\infty}(e^{-ct} t^n)$.
Comme $t^n = o(e^{ct/2})$, $e^{-ct} t^n = o_{t \to +\infty}(e^{-ct/2})$.
Donc, finalement, $\|e^{tA}\| = o_{t \to +\infty}(e^{-\alpha t})$ avec $\alpha = c/2 > 0$, d'où le résultat.

- **Existence solu°:**

Soit Y la solu° trouvée au 1er point. ($\mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$)

On a $Y' = AY + YB$ donc $Y(t) - C = A\left(\int_0^t Y(s)\,ds\right) + \left(\int_0^t Y(s)\,ds\right)B$.

Par le pt précédent, $\exists \alpha > 0$ et $M > 0$ / $\|e^{tA}\| \leq Me^{-\alpha t}$ et $\|e^{tB}\| \leq Me^{-\alpha t}$, $\forall t > 0$.

$\forall t \geq 0$, $\|Y(t)\| \leq \|e^{tA}\| \cdot \|C\| \cdot \|e^{tB}\| \leq Ke^{2\alpha t}$, $K = M^2\|C\|$.

Donc $\int_0^{+\infty} Y(s)\,ds$ CV absolument $\Rightarrow$ CV et $Y(t) \underset{t \to +\infty}{\to} 0$.

Donc $C = AX + XB$ avec $X = -\int_0^{+\infty} Y(s)\,ds = -\int_0^{+\infty} e^{tA} C e^{tB}\,dt$.

- **Unicité :** Mq $\phi : X \to AX + XB$ injective.

Par l'existence, elle est surjective. C'est un endo en dim finie

$\Rightarrow \phi$ injective $\Rightarrow$ résultat ☐.