

Théorème de Stampacchia

Théorème: Soit $\alpha: H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ forme bilinéaire.

On suppose α continue (ie $\exists C / \forall u, v \in H, |\alpha(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$)
et coercive (ie $\exists \alpha > 0 / \forall v \in H, \alpha(v, v) \geq \alpha \|v\|^2$).

Soit K convexe fermé et non vide.

Étant donné $\phi \in H'$, $\exists! u \in K / \forall v \in K, \alpha(u, v - u) \geq \phi(v - u)$.

De plus, si α est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété:

$$\begin{cases} u \in K \\ \frac{1}{2} \alpha(u, u) - \phi(u) = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \alpha(v, v) - \phi(v) \right\}. \end{cases}$$

Preuve:

Soit $\phi \in H'$, par le thm de représentation de Riesz, il existe un unique $f \in H$ tel que: $\forall v \in H, \phi(v) = \langle f, v \rangle$.

D'autre part, $\forall u \in H$ fixé, $v \rightarrow \alpha(u, v)$ est une forme linéaire continue sur H , donc par le théorème de représentation de Riesz, il existe $Au \in H$ tel que
(unique)
 $\alpha(u, v) = \langle Au, v \rangle, \forall v \in H$.

Par l'unicité de Au , A est un opérateur linéaire de H dans H .

$$\begin{aligned} \text{En effet, } \langle A(u + \tilde{u}), v \rangle &= \alpha(u + \tilde{u}, v) = \alpha(u, v) + \alpha(\tilde{u}, v) \\ &= \langle Au, v \rangle + \langle A\tilde{u}, v \rangle \\ &= \langle Au + A\tilde{u}, v \rangle, \forall v \in H. \end{aligned}$$

$$\text{De plus, } \begin{cases} \langle Au, u \rangle = \alpha(u, u) \geq \alpha \|u\|^2 \\ \|Au\|^2 = \langle Au, Au \rangle = \alpha(u, Au) \leq C \|u\| \|Au\| \end{cases}$$

$$\text{donc, } \begin{cases} \|Au\| \leq C \|u\| \\ \langle Au, u \rangle \geq \alpha \|u\|^2. \end{cases}$$

Ramenons l'inégalité de l'énoncé à un problème de point fixe.

Par le travail préliminaire effectué:

$$\begin{aligned} &\exists! u \in K / \forall v \in K, \alpha(u, v - u) \geq \phi(v - u) \\ \Leftrightarrow &\exists! u \in K / \forall v \in K, \langle Au, v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \\ \Leftrightarrow &\exists! u \in K / \forall v \in K, \forall \rho > 0, \langle \rho f - \rho Au + u - u, v - u \rangle \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\exists! u \in K / \forall \rho > 0, u = \rho_K(\rho f - \rho Au + u). \end{aligned}$$

TF analyse matricielle

$\forall v \in K$, on pose $S(v) = p_K(\varphi I - cAv + v)$.

On est ramené à un problème de point fixe.

Mq si $\varphi > 0$ est bien choisi, alors S est une contraction stricte,

ie $\exists K < 1$ tq $\forall v_1, v_2 \in K, \|S(v_1) - S(v_2)\| \leq K \|v_1 - v_2\|$.

La projec $\emptyset$ sur un convexe fermé est 1-lipschitzienne donc,

$$\|S(v_1) - S(v_2)\| \leq \|(v_1 - v_2) - \varphi(A(v_1 - v_2))\|, \text{ et donc,}$$

$$\begin{aligned} \|S(v_1) - S(v_2)\|^2 &\leq \|v_1 - v_2\|^2 - 2\varphi \langle A(v_1 - v_2), v_1 - v_2 \rangle + \varphi^2 \|A(v_1 - v_2)\|^2 \\ &\leq (1 - 2\varphi\alpha + \varphi^2 C^2) \|v_1 - v_2\|^2. \end{aligned}$$

Si on prend alors $\varphi = \frac{\alpha}{C^2}$, on a $\|S(v_1) - S(v_2)\|^2 \leq \underbrace{(1 - \frac{\alpha^2}{C^2})}_{< 1} \|v_1 - v_2\|^2$.

K fermé dans H complet, donc K complet et S va de K dans lui-même donc admet un unique point fixe d'où le résultat.

Si $a(u, v)$ symétrique, alors $a(u, v)$ est un produit scalaire sur H (def. pos. par coercivité de a), et la norme associée $a(u, u)^{1/2}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|$ issue du p-s usuel ($\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u) \leq C \|u\|^2$). Donc H est un espace de Hilbert pour ce p-s.

Par Riesz, $\exists! g \in H / \forall v \in H, \phi(v) = a(g, v)$.

L'inégalité de Stampacchia devient alors $\forall v \in K, a(u, v - u) \geq a(g, v - u)$

soit $\forall v \in K, a(g - u, v - u) \leq 0$ ie $u = p_K(g)$ où p_K projec $\emptyset$ au sens du p-s. défini par a .

Par le thm de projec $\emptyset$ sur un convexe fermé, (1) $\Leftrightarrow$ à trouver $u \in K$ tel que $a(g - u, g - u)^{1/2} = \min_{v \in K} a(g - v, g - v)^{1/2}$.

Cela revient à minimiser sur K , $a(g - v, g - v)$ ou encore $a(v, v) - 2a(g, v)$, ou encore $\frac{1}{2} a(v, v) - \phi(v)$.

Pour montrer Lax-Milgram : double inégalité en ~~montrant~~ utilisant que H est un espace vectoriel.