Matrices dz de $M_n(\mathbb{F}_q)$, dénombrement

Thm: $$\left|\{\text{mat dz de } M_n(\mathbb{F}_q)\}\right| = \sum_{\substack{n_1+\dots+n_q=n \\ n_i \geq 0}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{i=1}^{q} |GL_{n_i}(\mathbb{F}_q)|}$$

Preuve: On pose $\mathcal{E}_k$ ens. des k-uplets $(E_1, \dots, E_k)$ de ss esp. de $\mathbb{F}_q^n$ tq $E_1 \oplus \dots \oplus E_k = \mathbb{F}_q^n$, $\dim E_i = n_i$ (fixés) $(1 \leq i \leq k)$.
$GL_n(\mathbb{F}_q) \circlearrowright \mathcal{E}_k$ par $g \cdot (E_1, \dots, E_k) = (g(E_1), \dots, g(E_k))$.

• Prouvons que l'acO est bien définie :
- $\dim(g(E_i)) = \dim E_i = n_i$.
- Soit $y \in \sum_{i=1}^{k} g(E_i)$, alors si $y = \sum g(x_i) = \sum g(\tilde{x}_i)$
on a ainsi (par linéarité de g) que $y = g(\sum x_i) = g(\sum \tilde{x}_i)$
$\Rightarrow \sum x_i = \sum \tilde{x}_i \Rightarrow x_i = \tilde{x}_i \ \forall i$ car les E_i sont en somme directe.
Donc les $g(E_i)$ sont en somme directe.

• L'acO est transitive :
$\forall k$-uplet $(E_1, \dots, E_k)$ de $\mathcal{E}_k$, on construit e base de $\mathbb{F}_q^n$ en compilant des bases des E_i, $1 \leq i \leq k$.
Ainsi, pour deux k-uplets $(E_i)_i$ et $(E_i')_i$ de $\mathcal{E}_k$, on construit deux bases e et e'. L'élémt g de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ qui envoie e sur e' envoie alors (E_i) sur (E_i').

• $|\mathcal{E}_k| = |GL_n(\mathbb{F}_q)| \Big/ \prod_{i=1}^{k} |GL_{n_i}(\mathbb{F}_q)|$

En effet : $\mathrm{Stab}_{(E_i)}$ dans $\mathcal{E}_k$ est le sous gpe de $GL_n(\mathbb{F}_q)$ qui stabilise tous les E_i. Donc le sous-gpe $\prod_i GL(E_i)$ (diag. par bloc) $= \prod_i GL_{n_i}(\mathbb{F}_q)$.

Par la formule des classes : $|\mathcal{E}_k| = |GL_n(\mathbb{F}_q)| \Big/ \left|\prod_i GL_{n_i}(\mathbb{F}_q)\right|$

• Montrons le théorème :

On ordonne de 1 à q les éléments de $\mathbb{F}_q := \{ l_i, 1 \leq i \leq q \}$.

$\forall (n_i)_{1 \leq i \leq q}$ famille d'entiers ≥ 0 tq $\sum_i n_i = n$, on note $\mathcal{E}_{q,(n_i)}$ l'ens. $\mathcal{E}_K$ étudié dans les pts précédents.

On construit une bijecⓞ de {mat. dz} et la réunion disjointe des $\mathcal{E}_{q,(n_i)}$ pour tous les $(n_i)_{1 \leq i \leq q}$ dont la somme vaut n.

- Soit A dz de $M_n(\mathbb{F}_q)$. On assigne à la matrice dz A de $M_n(\mathbb{F}_q)$ la famille des sous-espaces $(E_i)_{1 \leq i \leq q} = E_A$, où E_i est le sesp. propre de A pour la vp $l_i \in \mathbb{F}_q$, ou $E_i = 0$ si l_i non vp de A.

A est dz donc $(E_i)_i \in \mathcal{E}_{q,(\dim(E_i))}$.

- Réciproquement, on fixe $(n_i)_i$ famille d'entiers ≥ 0 de somme n, et possédant q termes.

$\forall (E_i)_i$ de $\mathcal{E}_{q,(n_i)}$ on peut faire correspondre la matrice $A(E_i)$ de l'endo. ϕ de $\mathbb{F}_q^n$ tq $\phi(z_i) = l_i z_i, z_i \in E_i, 1 \leq i \leq q$.

On a donc bien une bijecⓞ des mat dz de $M_n(\mathbb{F}_q)$ dans la réunion disjointe de tous les ens. de q-uplets correspondant à des partiⓞs de n, ie $A \to E_A$ de réciproque $(E_i) \to A(E_i)$.

D'où le nombre souhaité ∎.

Cas trigo : trigo ssi pol car scindé sur $\mathbb{F}_q$

Donc dec. en sous esp. propres remplacée par dec. en sous esp. caractéristiques

$E_i = Ker(A - l_i I_{n_i})^{n_i}$ (corr. à la m̂ vp).

La restricⓞ à E_i est de la forme $l_i \, id + \underbrace{N}_{nilpotente}$.

$\Rightarrow$ Bij endo trigo et les couples (E_i, ϕ_i) avec E_i en somme directe et ϕ_i endo. nilpotent sur E_i.

Nb d'endo nilpo sur $\mathbb{F}_q^n$: $q^{n(n-1)}$