Théorème de Jordan $\mathcal{C}^1$

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application L-périodique $\mathcal{C}^1$, injective sur $[0,L[$, telle que $g(0)=0$, $g'(0)=1$, $|g'(t)|=1$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. On pose $\Gamma = g(\mathbb{R})$.

Le but est de montrer que $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ a deux composantes connexes.

__Lemme :__ Il existe $\alpha>0$ tel que pour tout $\varepsilon\in]0,\alpha[$, on ait $\Gamma\cap g_\varepsilon^+(\mathbb{R})=\emptyset$, $\Gamma\cap g_\varepsilon^-(\mathbb{R})=\emptyset$

où $g_\varepsilon^+ : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto g(t)+i\varepsilon g'(t) \end{array}$ et $g_\varepsilon^- : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto g(t)-i\varepsilon g'(t) \end{array}$.

__Démonstration :__ Comme g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, g' est continue sur $[0,2L]$, donc uniformément continue par Heine. Etant de plus L-périodique, g' est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

On fixe donc $\eta>0$ tel que pour tous $s,t\in\mathbb{R}$ vérifiant $|s-t|<\eta$, on ait $|g'(s)-g'(t)|<1$.

Soit $t\in\mathbb{R}$. On pose $h : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ s \longmapsto g(s)-g(t)-(s-t)g'(t) \end{array}$. Pour tout $s\in\mathbb{R}$, $h'(s)=g'(s)-g'(t)$,

donc si $|s-t|<\eta$, $|h'(s)|<1$, ce qui donne $|h(s)|=|g(s)-g(t)-(s-t)g'(t)|<|s-t|$ pour tout $s\in]t-\eta,t+\eta[$. Pour tous $s,t\in\mathbb{R}$ vérifiant $|s-t|<\eta$, on a

donc $|g(s)-g(t)-(s-t)g'(t)|<|s-t|$.

On pose $K = [0,L]^2\cap\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 / \forall m\in\mathbb{Z}, |s-t+mL|\geq\eta\}$, qui est compact.

Par continuité de $(s,t)\longmapsto|g(s)-g(t)|$ sur K, on pose $\alpha=\inf_{(s,t)\in K}|g(s)-g(t)|=|g(s_0)-g(t_0)|$, pour un certain $(s_0,t_0)\in K$.

Comme $(s_0,t_0)\in K$, on ne peut pas avoir $s_0 = t_0 + mL$ pour un $m\in\mathbb{Z}$, ce qui donne $g(s_0)\neq g(t_0)$, d'où $\alpha>0$. Soit à présent $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant, pour tout $m\in\mathbb{Z}$, $|s-t+mL|>\eta$. On fixe alors $k,l\in\mathbb{Z}$ tels que $s' = s+kL\in[0,L]$, $t' = t+lL\in[0,L]$.

On a $|g(s)-g(t)| = |g(s')-g(t')| \geqslant \alpha$, car $(s',t')\in K$. On a donc :

$$\forall (s,t)\in\mathbb{R}^2,\ (\forall m\in\mathbb{Z},\ |s-t+mL|\geqslant\eta) \Rightarrow |g(s)-g(t)|\geqslant\alpha>0$$

On suppose alors que $\Gamma\cap g_\varepsilon^+(\mathbb{R})$ n'est pas vide. On fixe $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ tels que l'on ait $g(t) = g(s)+i\varepsilon g'(s)$. On a $|g(t)-g(s)| = |i\varepsilon g'(s)| = \varepsilon<\alpha$, donc il existe $m\in\mathbb{Z}$ tel que $|s-t+mL|<\eta$. Quitte à changer t en $t-mL$, on peut supposer que $|s-t|<\eta$. On a alors :

$$|-i\varepsilon g'(s)-(t-s)g'(s)| = |g(t)-g(s)-(t-s)g'(s)| < |t-s|,$$

d'où $|t-s+i\varepsilon| < |t-s|$, car $|g'(s)|=1$, ce qui est absurde.

On a donc $\Gamma\cap g_\varepsilon^+(\mathbb{R})=\emptyset$, et on prouve de même que $\Gamma\cap g_\varepsilon^-(\mathbb{R})=\emptyset$.

<u>Théorème :</u> $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ a deux composantes connexes.

<u>Démonstration :</u>

- Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$. L'application $\theta : t\mapsto|z-g(t)|^2$ étant continue et L-périodique, elle atteint un maximum en un certain $t_1\in\mathbb{R}$. Mais, pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\theta'(t) &= -g'(t)\bar{z} - z\overline{g'(t)} + g'(t)\overline{g(t)} + g(t)\overline{g'(t)} \\ &= g'(t)(\overline{g(t)}-\bar{z}) + (g(t)-z)\overline{g'(t)} \\ &= 2\,\mathrm{Re}\,(g'(t)(g(t)-z))\end{aligned}$$

, donc $\mathrm{Re}\,(g'(t_1)(g(t_1)-z)) = 0$.

Donc $g'(t_1)$ et $g(t_1)-z$ sont orthogonaux. La demi-droite $[g(t_1), z)$ contient donc $g(t_1)+i\varepsilon g'(t_1)$ ou $g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)$. Par exemple, $g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1) \in [g(t_1), z)$.

Deux cas se présentent :

- soit $g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)$ est sur le segment $[g(t_1), z]$, auquel cas, par construction de $g(t_1)$, le segment $[g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1), z]$ ne contient aucun point de Γ.

- soit z est sur le segment $[g(t_1), g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)]$, auquel cas tout point de $[z, g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)]$ est de la forme $g(t_1)-i\delta g'(t_1)$ avec $\delta \leqslant \varepsilon$. Comme $g_\delta^-(\mathbb{R}) \cap \Gamma = \emptyset$, le segment $[z, g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)]$ ne contient aucun point de Γ.

Dans tous les cas, z peut être joint à $g(t_1)-i\varepsilon g'(t_1)$ par un segment ne coupant pas Γ. On peut donc joindre tout $z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma$ à $g_\varepsilon^-(\mathbb{R})$ ou $g_\varepsilon^+(\mathbb{R})$ par un arc. Donc $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ a au plus deux composantes connexes.

- On pose $z_\varepsilon^+ = g_\varepsilon^+(0) = i\varepsilon$, et $z_\varepsilon^- = g_\varepsilon^-(0) = -i\varepsilon$.

On a $\mathrm{Ind}_g(z_\varepsilon^+) - \mathrm{Ind}_g(z_\varepsilon^-) = \dfrac{1}{2i\pi}\left[\displaystyle\int_{-L/2}^{L/2} \frac{g'(t)}{g(t)-z_\varepsilon^+}\,dt - \int_{-L/2}^{L/2} \frac{g'(t)}{g(t)-z_\varepsilon^-}\,dt\right]$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_{-L/2}^{L/2} g'(t)\,\frac{2i\varepsilon}{g(t)^2+\varepsilon^2}\,dt$$

$$= \frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-L/2}^{L/2} \frac{g'(t)}{g(t)^2+\varepsilon^2}\,dt$$

On pose $a(t) = \dfrac{g(t)}{t}$, prolongé par continuité en 0 par $a(0) = 1$.

Il existe $\delta \in]0, \frac{L}{2}[$ tel que pour tout $t \in]-\delta, \delta[$, on ait $|a(t)^2 - 1| < \frac{1}{2}$.

Par convergence dominée, on a $\displaystyle\int_{\delta \leq |t| \leq 1/2} \frac{g'(t)}{g(t)^2+\varepsilon^2}\,dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \int_{\delta \leq |t| \leq \frac{L}{2}} \frac{g'}{g^2} < +\infty$

car g ne s'annule pas sur $\{t,\ \delta \leq |t| \leq L/2\}$, donc $\displaystyle\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{\delta \leq |t| \leq \frac{L}{2}} \frac{g'(t)}{g(t)^2+\varepsilon^2}\,dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0.$

De plus, $\displaystyle\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{|t|<\delta} \frac{g'(t)}{g(t)^2+\varepsilon^2}\,dt = \frac{\varepsilon^2}{\pi}\int_{|u|<\frac{\delta}{\varepsilon}} \frac{g'(\varepsilon u)}{g(\varepsilon u)^2+\varepsilon^2}\,du$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{g'(\varepsilon u)}{u^2 a(\varepsilon u)^2+1}\,\mathbb{1}_{[-\frac{\delta}{\varepsilon},\frac{\delta}{\varepsilon}]}(u)\,du$$

Or $\displaystyle\frac{g'(\varepsilon u)}{u^2 a(\varepsilon u)^2+1}\,\mathbb{1}_{[-\frac{\delta}{\varepsilon},\frac{\delta}{\varepsilon}]}(u) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \frac{1}{u^2+1}$, et, comme $\mathrm{Re}(a(\varepsilon u)^2) \geq \frac{1}{2}$

pour $|u| \leq \frac{\delta}{\varepsilon}$, on a $\displaystyle\left|\frac{g'(\varepsilon u)}{u^2 a(\varepsilon u)^2+1}\,\mathbb{1}_{[-\frac{\delta}{\varepsilon},\frac{\delta}{\varepsilon}]}(u)\right| \leq \frac{\|g'\|_\infty}{\frac{u^2}{2}+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Par convergence dominée, on a $\displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{g'(\varepsilon u)}{u^2 a(\varepsilon u)^2+1}\,\mathbb{1}_{[-\frac{\delta}{\varepsilon},\frac{\delta}{\varepsilon}]}(u)\,du \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{du}{u^2+1}}_{=1}$

donc $\mathrm{Ind}_g(z_\varepsilon^+) - \mathrm{Ind}_g(z_\varepsilon^-) \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 1$. Or $z \longmapsto \mathrm{Ind}_g(z)$ est continue sur $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ n'est pas connexe.