Can del perder

Calcul intégral

Équa⊙ de la chaleur

On pose le problème suivant :

On cherche u déf. sur $\mathbb{R} \times]0,+\infty[$ $\mathcal{C}^1$ en t, $\mathcal{C}^2$ en x tq

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_{xx}^2 u(x,t) & \forall x \in \mathbb{R}, t>0 \\ \lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = f(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$ avec f $\mathcal{C}^2$ bornée 1-périodique sur $\mathbb{R}$ (donnée initiale).

On cherche une solu⊙ de l'équa⊙ :

Comme u est $\mathcal{C}^1$ (même $\mathcal{C}^2$) on a $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n(t)\, e^{2i\pi n x}$ (qui CV normalement)

On reporte dans l'équa⊙ : $\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n'(t) e^{2i\pi n x} = -4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 u_n(t) e^{2i\pi n x}$ ← formellement

et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\lim\limits_{t\to 0} u_n(t) \right) e^{2i\pi n x} = f(x)$.

Par identifica⊙ : $\begin{cases} u_n'(t) = -4\pi^2 n^2 u_n(t) \\ \lim\limits_{t\to 0} u_n(t) = \int_{[0,1]} f(y) e^{-2i\pi n y} dy \end{cases}$

On trouve ainsi $u_n(t) = \left(\int_{[0,1]} f(y) e^{-2i\pi n y} dy \right) e^{-4\pi^2 n^2 t}$.

Donc $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\int_{[0,1]} f(y) e^{-2i\pi n y} dy \right) e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2i\pi n x}$

et donc $u(x,t) = \int_{[0,1]} \underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2i\pi n(x-y)} e^{-4\pi^2 n^2 t} \right)}_{= k(x-y,t)} f(y)\, dy$.

a) u bien déf.

$k(x-y,t)$ CV si $t>0$, $\mathcal{C}^\infty$ de période 1 en y

→ donc $\int_{[0,1]} \dots$ est bien définie.

$k(x-y,t) \le C(x,t)$

ou $|k(x-y,t) f(y)| \le \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 n^2 t} \right) \text{cste}(t)$ cste $\in L^1$.

On pose $u(x,t) = \int_{[0,1]} k(x-y,t) f(y)\, dy \quad \forall t>0$.

b) $\partial_t u$ et $\partial^2_{xx} u$ existent et sont C^∞ et u sol. de $\partial_t u = \partial_{xx} u$.

$\forall k \geq 0$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^k e^{2i\pi n(x-y)} e^{-4\pi^2 n^2 t}$ CV norm. $\forall (t,x) \in K \times \mathbb{R}$

avec K int. compact dans $]0,+\infty[$.

On dérive donc $k(x-y,t)$ en t et en x en dérivant sous le signe Σ.

et on a des fcts C^∞ en y et on peut donc dériver u en dérivant sous le signe Σ. + Thm de dérivation C^∞ sous le signe intégrale.

u sol. de l'équation de la chaleur car $(t,x) \mapsto e^{-4\pi^2 n^2 t} e^{2i\pi n x}$ solutions.

c) $\lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x)$

Fubini $\Rightarrow$ Σ et $\int$ se permutent

On a donc $u(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{-4\pi^2 n^2 t}\, e^{2i\pi n x}$.

En écrivant f comme sa série de Fourier :

$$u(x,t) - f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\pi n x} \left(e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1 \right)$$

$\boxed{c_n(f) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ $\left(\text{car } f \text{ est } C^2\right)$, la série ci-dessus CV normalement sur $[0,+\infty[$.

Donc $\lim_{t \to 0} \left(u(x,t) - f(x) \right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\pi n x} \lim_{t \to 0} \left(e^{-4\pi^2 n^2 t} - 1 \right)$

$= 0$.

Cette fonction est la seule solution :

Soient u_1 et u_2 2 solutions, alors $u = u_1 - u_2$ sol de

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial^2_{xx} u(x,t) & \forall x \in I \text{ et tout } t > 0 \\ u(x,0) = 0 & \forall x \in I \end{cases}$$

Posons pour $t \in [0,+\infty[$, $\boxed{E(t) = \begin{cases} \int_0^1 (u(x,t))^2 dx \text{ si } t > 0 \\ 0 \text{ si } t = 0 \end{cases}}$

E est C^0 en 0, dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$E'(t) = \int_0^1 2u(x,t)\,\partial_t u(x,t)\,dx = \int_0^1 2u(x,t)\,\partial_{xx} u(x,t)\,dx.$$

Comme $u(0,t) = u(1,t)\ \forall t > 0$, par une IPP,

$$E'(t) = -2\int_0^1 (\partial_x u(x,t))^2\,dx.$$

$E \geq 0$ ↓ sur $[0, +\infty[$ et $E(0) = 0 \Rightarrow E \equiv 0 \Rightarrow u = 0$ ☒.