

Hankel

Thm: Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n et soient $x_1, \dots, x_n$ ses racines.
 On pose $s_k = m_1 x_1^k + \dots + m_n x_n^k$ et $\sigma: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}; X \mapsto \sum_{0 \leq i, j \leq n-1} s_{i+j} X_i X_j$

- Alors :
- ① $\sigma|_{\mathbb{R}}$ def. une fg sur $\mathbb{R}^n$
 - ② soit (p, q) sa signature, alors $p+q$ est le nbre de racines distinctes de P
 - ③ $p-q$ est le nbre de racines réelles distinctes de P .

Preuve:

① σ est une fg (pol. hom. de degré 2 sur $\mathbb{C}$) sur $\mathbb{C}$.

De plus, $s_k = \sum_{\alpha \in Sp(P) \cap \mathbb{R}} \alpha^k + \sum_{\substack{\alpha \in Sp(P) \cap \mathbb{C} \\ \text{Im}(\alpha) > 0}} \alpha^k + \bar{\alpha}^k$

s_k est $\mathbb{R}$ -invariant donc réel,

Donc $\sigma(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathbb{R}$ et $\sigma|_{\mathbb{R}}$ def. une fg sur $\mathbb{R}^n$.

② Soit ϕ_k la forme linéaire sur $\mathbb{C}^n$ qui correspond au polynôme $P_k(x_0, \dots, x_{n-1}) = x_0 + x_k x_1 + \dots + x_k^{n-1} x_{n-1}$.
 Dans la base duale de $\mathbb{C}^n$ notée (e_i^*) (canonique) :

$$\phi_k = e_0^* + x_k e_1^* + \dots + x_k^{n-1} e_{n-1}^*$$

On obtient alors la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

coordonnées de ϕ_k

Or, $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$ car les x_i sont distincts 2 à 2.
 (det. matrice de Vandermonde).

Donc A est de rang n et les ϕ_k sont indépendants sur $\mathbb{C}$.

Or, le coeff $X_i X_j$ dans $\sum_{k=1}^n m_k \phi_k^2$ vaut $\sum_{k=1}^n 2m_k x_k^i x_k^j = \sum_{k=1}^n 2m_k x_k^{i+j}$
 $= 2s_{i+j} \quad \text{si } i \neq j$

Si $i = j$ on a $\sum_{k=1}^n m_k x_k^{2i} = s_{2i}$. On retrouve $\sigma = \sum_{k=1}^n m_k \phi_k$

$\text{rang } \sigma = t$ car les ϕ_k sont indépendants
 Donc $t = \text{rang } \sigma = \text{rang } \sigma|_{\mathbb{R}} = p + q$.

③. Il q $\text{sign}(\phi_k^2 + \bar{\phi}_k^2) = (1, 0)$ sur $\mathbb{R}^n$ si x_k réel
 et $(1, 1)$ sinon.

Si x_k réel, $\phi_k^2 + \bar{\phi}_k^2 = 2\phi_k^2$ de signature $(1, 0)$ car ϕ_k non nulle.

Si x_k non réel, on a $\bar{\phi}_k^2 + \phi_k^2 = 2\text{Re}(\phi_k)^2 - 2\text{Im}(\phi_k)^2$
 qui est donc bien une fg réelle.

x_k n'est pas réel, donc $x_k \neq \bar{x}_k$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x_k & \bar{x}_k \\ \vdots & \vdots \\ x_k^{n-1} & \bar{x}_k^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang 2 (prendre le mineur des 2 premières lignes).

Donc ϕ_k et $\bar{\phi}_k$ sont indépendantes $\Rightarrow \text{rang}(\phi_k^2 + \bar{\phi}_k^2) = 2$
 sur $\mathbb{C}$ donc 2 sur $\mathbb{R}$.

Donc $\text{sign}(\sigma|_{\mathbb{R}}) = (1, 1)$.

• σ est somme de $m_k \phi_k^2$ avec ϕ_k indep.

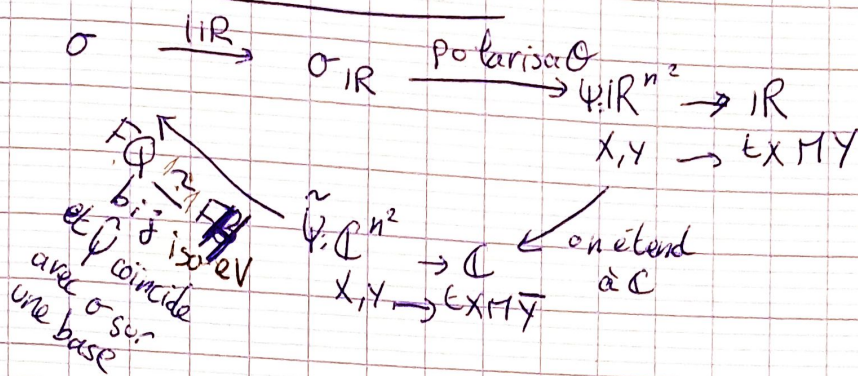
On regroupe les ϕ_k conjuguées entre elles, lorsqu'elles ne sont pas réelles.

Soit r le nbe de racines ^{réelles} distinctes, alors :

$$(r, 0) + \left(\frac{t-r}{2}, \frac{t-r}{2} \right) = \left(\frac{t+r}{2}, \frac{t-r}{2} \right)$$

d'où le résultat.

Passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$:



$$\sigma = \sum_{R=1}^k m_R \varphi_R^2$$

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{rg}_{\mathbb{C}}(\sigma) + \operatorname{rg}_{\mathbb{C}}(\sigma_{\mathbb{R}}) \\ &= \operatorname{rg}_{\mathbb{C}}(M) = \operatorname{rg}_{\mathbb{C}}(\sigma_{\mathbb{R}}) \\ &= \operatorname{rg}_{\mathbb{R}}(M) \\ &= \operatorname{rg}(\sigma_{\mathbb{R}}) = p + q \end{aligned}$$

$\operatorname{Re}(\phi_k)$ et $\operatorname{Im}(\phi_k)$ indépendantes: $(\Rightarrow \operatorname{sign} = (1, 1))$

$$\begin{aligned} \alpha, \beta &\in \mathbb{R}, \\ \alpha \operatorname{Re}(\phi_k) + \beta \operatorname{Im}(\phi_k) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha \left(\frac{\phi_k + \overline{\phi_k}}{2} \right) + \beta \left(\frac{\phi_k - \overline{\phi_k}}{2i} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2i} \right) \phi_k + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2i} \right) \overline{\phi_k} &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$