

$f \in C^0 \text{ sur } \mathbb{R} \Rightarrow$ bornée au vois de 0.

Donc, si (f, f_0) ~~libre~~ liée $\Rightarrow f$ bornée au vois de 0.

Supposons que (f, f_0) libre.

Sur $]0, a[$, l'ens. des sol^s de $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$ est un ev de dim 2 donc (f, f_0) est une base.

Soit $W = f f_0' - f_0 f'$ (Wronskien de (f, f_0)).

$\forall x \in]0, a[, W'(x) = f(x)f_0''(x) - f_0(x)f''(x) = \frac{-1}{x}W(x)$ en remplaçant $f''(x)$ par $-\frac{1}{x}f'(x) - f(x)$ et idem pour f_0'' .

$\exists C \in \mathbb{R} / \forall x \in]0, a[, W(x) = C e^{-\ln x} = \frac{C}{x}$ et $C \neq 0$ car (f, f_0) libre.

On a donc, $\forall x \in]0, a[, f(x)f_0'(x) - f_0(x)f'(x) = \frac{C}{x}$.

Supposons f bornée au vois de 0.

Comme $f_0 \xrightarrow{0} 1$ et $f_0' \xrightarrow{0} 0$, $f'(x) \sim \frac{C}{x}$ $x \rightarrow 0$.

Soit $b \in]0, a[$. $x \rightarrow \frac{C}{x}$ le signe est sur $]0, b[$ et non intégrable sur $]0, b[$.

Donc $f(x) - f(b) = \int_b^x f'(t) dt \sim_{x \rightarrow 0} -C \int_b^x \frac{1}{t} dt = -C(\ln x - \ln b)$.

On a donc $f(x) \sim_{x \rightarrow 0} -C \ln x$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f = +\infty$, contradiction!!!

Donc si (f, f_0) libre, f n'est pas bornée au vois de 0.

On a donc l'équivalence $\Leftrightarrow$.

Equa⁰ de Bessel

Thm: Soit $xy'' + y' + xy = 0$ (E).

Alors: ① $x \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta$ sol⁰ de (E)

② $\exists!$ sol⁰ f_0 développable en série entière et vérifiant $f_0(0) = 1$
(autour de 0)

De plus, si f sol⁰ de l'équa diff sur $]0, \alpha[$ alors
(f, f_0) libre si f non bornée au voisinage de 0. (intervalle)

Preuve:

On peut zapper si besoin

① $(x, \theta) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \frac{1}{\pi} \cos(x \sin \theta) \in C^\infty$. Donc $g: x \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) d\theta \in C^\infty$
sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin \theta) \sin \theta d\theta$, $g''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \theta) \sin^2 \theta d\theta$.

Ainsi, $xg''(x) + g'(x) + xg(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \cos(x \sin \theta) \cos^2 \theta - \sin(x \sin \theta) \sin \theta) d\theta$
dérivée en θ de $\sin(x \sin \theta) \cos \theta$

Donc $xg''(x) + g'(x) + xg(x) = \frac{1}{\pi} [\sin(x \sin \theta) \cos \theta]_0^\pi = 0$.

Donc g sol⁰.

② Soit f sol⁰ dev. en série entière au voisinage de 0.

$\exists$ une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $R > 0$ / $\forall x \in]-R, R[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

On a alors, $\forall x \in]-R, R[, xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$ et $xf''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n$.

Donc $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0$.

Par l'unicité du DSE, il faut: $\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, (n+1)^2 a_{n+1} = -a_{n-1} \end{cases}$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)^2 (2n-2)^2 \cdots (2)^2} = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2}$.

Donc, $\forall x \in]-R, R[, f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

Réciproquement, cette série entière a un rayon de convergence infini et définit une fct f dev. en série entière dont les coeff^s vérifient les cond⁰s précédentes. f est donc sol⁰ de l'équa diff.

Comme $f(0) = a_0$, $\exists!$ sol⁰ f_0 DSE avec $f_0(0) = 1$ qui est $f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$.

